Plaquette 4 – Convexité, études de fonctions et approximations

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Encadrement tangente-corde pour f convexe sur $[a,b]$, $x \in [a,b]$:

$$f(a) + f'(a)(x-a) \leq f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

— Une droite coupe la courbe d'une fonction **strictement convexe** en au plus deux points.

— **Inflexion** : f'' change de signe ; la courbe traverse sa tangente.

— **Newton** : $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$; **fausse position** : on remplace la tangente par une corde.

Correction de l'exercice 1 – Points d'inflexion d'une cubique

a) $f''(x) = 6x - 6$: concave sur $]-\infty, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$. $I = (1, 0)$.

b) $f'(1) = -3$: tangente $y = -3(x-1)$. $f(x) + 3(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$: courbe **sous** la tangente pour $x < 1$, **au-dessus** pour $x > 1$: elle la traverse.

c) $f(1+h) + f(1-h) = (h^3 - 3h) + (-h^3 + 3h) = 0 = 2 \times 0$: symétrie centrale par rapport à I.

d) $f'' = 6ax + 2b$ s'annule et change de signe en $x_0 = -\frac{b}{3a}$; en posant $x = x_0 + h$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah^3 + ph$$

— (le terme en h^2 disparaît), fonction impaire de h.

Réponse. Inflexion en $(1, 0)$, tangente $y = -3x + 3$ traversée ; toute cubique a un centre de symétrie en son inflexion.

Correction de l'exercice 2 – Courbe en cloche

a) $g' = -xg$, $g'' = (x^2 - 1)g$: inflexions en $x = \pm 1$.

b) En 1 : $g(1) = \mathrm{e}^{-1/2}$, $g'(1) = -\mathrm{e}^{-1/2}$: tangente $y = \mathrm{e}^{-1/2}(2 - x)$, qui coupe l'axe en $x = 2$. Symétriquement en -2.

c) Concave sur $[-1, 1]$, convexe ailleurs : pour la loi normale centrée réduite, les inflexions sont à **un écart type** de la moyenne.

d) $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$: inflexions en

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577$$

Réponse. Inflexions de $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ en ± 1 ; de $\frac{1}{1+x^2}$ en $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 3 – La sigmoïde

a) $\sigma' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \sigma \cdot \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \sigma(1-\sigma)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b)

$$\sigma'' = \sigma'(1-2\sigma) = \sigma(1-\sigma)(1-2\sigma)$$

— positive pour $\sigma < \frac{1}{2}$ ($x < 0$), négative pour $x > 0$: convexe puis concave, inflexion en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

c) $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} = 1$: symétrie par rapport à $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

d) La tangente en 0 est $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ ($\sigma'(0) = \frac{1}{4}$) ; σ concave sur $\mathbb{R}_+$ est sous cette tangente, convexe sur $\mathbb{R}_-$ au-dessus.

Réponse. $\sigma' = \sigma(1-\sigma)$; inflexion en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, tangente $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$.

Correction de l'exercice 4 – Newton pour une fonction convexe

a) $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} < u_n$ car $f(u_n) > 0$ et $f'(u_n) > 0$. La tangente minore f : $0 = T(u_{n+1})$ et $f(u_{n+1}) \geq T(u_{n+1}) = 0$, donc $u_{n+1} \geq \alpha$.

b) Décroissante minorée : $u_n \to \ell \geq \alpha$, et par continuité

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \quad \Longrightarrow \quad f(\ell) = 0,\ \ell = \alpha$$

c) $u_1 = 1{,}5$, $u_2 = \frac{17}{12} \approx 1{,}4167$, $u_3 = \frac{577}{408} \approx 1{,}414216$.

d) $u_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$ peut dépasser α (ici $u_1 = 1{,}5$ depuis 1) ; à partir de là on est dans le cas précédent.

Réponse. Depuis un point où $f > 0$, les itérés de Newton décroissent vers α.

Correction de l'exercice 5 – Méthode de la fausse position

a)

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n)\frac{b-u_n}{f(b)-f(u_n)}$$

b) $f(u_n) < 0$ donne $u_{n+1} > u_n$. La corde majore f sur $[u_n, b]$: en u_{n+1}, $f(u_{n+1}) \leq 0$, donc $u_{n+1} \leq \alpha$.

c) Croissante majorée : limite $\ell \leq \alpha$ vérifiant $f(\ell) = 0$ par passage à la limite, donc $\ell = \alpha$.

d) $u_1 = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$, $u_2 = 1{,}4$, $u_3 = \frac{24}{17} \approx 1{,}41176$, $u_4 = \frac{41}{29} \approx 1{,}41379$: convergence **linéaire**, bien plus lente que Newton (quadratique).

Réponse. Fausse position : croissante vers α, convergence linéaire ($u_4 \approx 1{,}4138$).

Correction de l'exercice 6 – Intersections avec une droite

a) $g = f -$ (affine) est strictement convexe ; si g s'annulait en $x < y < z$, y serait sur la corde, ce que la stricte convexité interdit.

b) $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1$: $g(0) = 0$, $g(1) = \mathrm{e} - 3 < 0$, $g(1{,}5) \approx 0{,}48 > 0$: une seconde racine dans $]1; 1{,}5[$ (en fait $\approx 1{,}2564$), et pas plus par a).

c) $\ln x - ax$ est strictement concave, de maximum en $x = \frac{1}{a}$ égal à $-\ln a - 1$:

$$a < \frac{1}{\mathrm{e}} : \text{2 solutions}; \quad a = \frac{1}{\mathrm{e}} : 1; \quad a > \frac{1}{\mathrm{e}} : 0$$

d) $\mathrm{e}^x - x$ a pour minimum 1 en 0 : 0 solution si $b < 1$, 1 si $b = 1$, 2 si $b > 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Au plus deux intersections ; $e^x = 2x+1$: 0 et $\approx 1{,}256$; $\ln x = ax$: seuil $a = \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 7 – Asymptote et convexité

a) $\varphi = f - (ax+b)$ est convexe de limite 0 en $+\infty$; par l'exercice « convexe avec limite finie », elle est décroissante, donc $\varphi(x) \geq \lim \varphi = 0$.

b) $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} > 0$ ✓.

c) Voir a) : φ convexe, de limite finie en $+\infty$, est décroissante.

d) $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$, asymptote $y = x + \frac{1}{2}$. f est convexe ? $f'' = -\dfrac{1}{4(x^2+x)^{3/2}} < 0$: f est **concave**, donc au contraire

$$\sqrt{x^2+x} \leq x + \frac{1}{2}$$

— (en effet $x^2 + x \leq x^2 + x + \frac{1}{4}$), et l'écart $x + \frac{1}{2} - f(x)$ décroît vers 0.

Réponse. Convexe : au-dessus de son asymptote ; $\sqrt{x^2+x}$ (concave) est sous $y = x + \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Encadrer ln par tangentes et cordes

a) ln concave : au-dessus de sa corde $y = (x-1)\ln 2$ sur $[1,2]$, sous sa tangente en 1, $y = x - 1$.

b) Tangente en $\frac{3}{2}$: pente $\frac{2}{3}$; toute tangente majore une fonction concave.

c) Corde : $\ln 1{,}2 \geq 0{,}2 \ln 2 \approx 0{,}1386$. Tangente en 1 : $\leq 0{,}2$. Tangente en $\frac{3}{2}$:

$$\ln 1{,}2 \leq 0{,}4055 + \frac{2}{3}(-0{,}3) = 0{,}2055$$

— moins bonne ici ; la meilleure majoration vient de la tangente la plus proche. Valeur : 0,1823.

d) $\ln x \leq x - 1$ (tangente en 1) ; appliqué à $\frac{1}{x}$: $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$.

Réponse. $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$; $0{,}139 \leq \ln 1{,}2 \leq 0{,}2$.

Correction de l'exercice 9 – Accroissements d'une fonction convexe

a) Tangentes en x et en y : $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$ et $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$.

b) $f(n+1) - f(n)$ est la pente de la corde sur $[n, n+1]$, qui croît avec n (trois pentes).

c) $f'(x) = \ln x + 1$; a) sur $[n, n+1]$.

d) En sommant la majoration de $k = 1$ à $n-1$: $n \ln n \leq \ln(n!) + (n-1)$, soit

$$\ln(n!) \geq n \ln n - n + 1$$

— Pour $n = 10$: $23{,}026 - 10 + 1 = 14{,}026 \leq 15{,}104$ ✓. En sommant la minoration de $k = 1$ à n : $\ln(n!) + n \leq (n+1)\ln(n+1)$, soit $\ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$ (16,38 pour $n = 10$ ✓).

Réponse. $n \ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1)\ln(n+1) - n$.

Correction de l'exercice 10 – Portefeuille de variance minimale

a) $V''(w) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) > 0$.

b) $V'(w) = 2w\sigma_1^2 - 2(1-w)\sigma_2^2 = 0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$w^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{0{,}01}{0{,}05} = 0{,}2$$

— $V(w^*) = 0{,}04 \cdot 0{,}04 + 0{,}64 \cdot 0{,}01 = 0{,}008$, volatilité $\approx 8{,}9\,\%$.

c) Tout sur l'actif 2 : 10 %. Diversifier avec un actif **plus risqué** réduit le risque : c'est l'effet de diversification.

d) w^* est proportionnel à la variance de l'**autre** actif : on met plus sur l'actif le moins volatil, mais jamais tout.

Réponse. $w^* = 0{,}2$, volatilité $\approx 8{,}9\,\% < 10\,\%$.

Correction de l'exercice 11 – Répartir une production

a) $C(q_1) = q_1^2 + 2(30 - q_1)^2$, $C'' = 6 > 0$.

b) $C'(q_1) = 2q_1 - 4(30 - q_1) = 6q_1 - 120 = 0 : q_1 = 20$, $q_2 = 10$,

$$C = 400 + 200 = 600$$

c) $C_1'(20) = 40 = C_2'(10)$ ✓.

d) $C'(q_1) = C_1'(q_1) - C_2'(Q - q_1)$; C est convexe, donc un point critique est un minimum global : l'optimum est atteint quand $C_1'(q_1) = C_2'(q_2)$.

Réponse. $q_1 = 20$, $q_2 = 10$, coût 600 ; coûts marginaux égaux.

Correction de l'exercice 12 – Convexe non affine ⇒ tend vers l'infini

a) f' est croissante ; si elle était constante, f serait affine.

b) $f(x) \geq f(b) + f'(b)(x - b) \to +\infty$ si $f'(b) > 0$. De même en $-\infty$ avec la tangente en a si $f'(a) < 0$.

c) Comme $f'(a) < f'(b)$, on a $f'(b) > 0$ ou $f'(a) < 0$.

d) $e^x \to +\infty$ en $+\infty$ seulement ; x^2 des deux côtés ; $\ln(1 + e^x)$:

$$\ln(1 + e^x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

Réponse. Une fonction convexe non affine sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ d'au moins un côté.

Correction de l'exercice 13 – Convexité et polygones réguliers

a) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ et $h = x\cos x - \sin x$ vérifie $h' = -x\sin x \leq 0$, $h(0) = 0 : h \leq 0$.

b) $p_n = 2\pi\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}$ et $\frac{\pi}{n}$ décroît : p_n croît. Limite 2π.

c) $\frac{\tan x}{x}$ est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (tan convexe avec $\tan 0 = 0$: pente de la corde croissante), donc q_n décroît vers 2π.

d)

$$n = 6 : 3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3} \approx 3{,}464; \qquad n = 12 : 3{,}106 \leq \pi \leq 3{,}215$$

Réponse. $6\sin\frac{\pi}{6} = 3 \leq \pi$; avec $n = 12 : 3{,}106 \leq \pi \leq 3{,}215$.

Correction de l'exercice 14 – Rendements décroissants

a) $P'' = -\frac{5}{2}L^{-3/2} < 0$: chaque heure supplémentaire rapporte moins que la précédente ($P' = 5L^{-1/2}$ décroît).

b) $\frac{P(L)}{L} = 10L^{-1/2}$, décroissante (pente de la corde issue de l'origine d'une fonction

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

concave nulle en 0).

c) Jensen pour P concave :

$$\frac{P(L_1)+P(L_2)}{2} \le P\left(\frac{L_1+L_2}{2}\right) = P(50)$$

d) $2P(50) = 20\sqrt{50} \approx 141{,}4$ contre $10(\sqrt{80}+\sqrt{20}) \approx 134{,}2$: gain $\approx 7{,}2$ unités (5 %).

Réponse. Répartition égale optimale : 141,4 unités contre 134,2.

Correction de l’exercice 15 – Fonctions convexes positivement homogènes

a)

$$f(x+y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le 2\cdot\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

b) Pour $x \ge 0$, $f(x) = xf(1)$; pour $x \le 0$, $f(x) = (-x)f(-1)$.

c) f est affine par morceaux de pentes $-\beta$ puis α : convexe si et seulement si $-\beta \le \alpha$, soit $\alpha+\beta \ge 0$.

d) Une norme vérifie $f(-x) = f(x)$: $\alpha = \beta$, et $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$: $\alpha > 0$. Alors $f = \alpha|x|$.

Réponse. $f(x) = \alpha x^+ + \beta x^-$, convexe si et seulement si $\alpha+\beta \ge 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).