Plaquette 1 – Convexité, position par rapport aux tangentes et inégalités classiques

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et théorèmes du cours.

— **Définition** : f est convexe sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $t \in [0\,;1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Géométriquement : la courbe est **sous ses cordes**.

— **Caractérisation par la dérivée** : si f est dérivable sur I, f est convexe $\Leftrightarrow f'$ est **croissante** sur I.

— **Caractérisation par la dérivée seconde** : si f est deux fois dérivable, f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I.

— **Position par rapport aux tangentes** : si f est convexe et dérivable, la courbe est **au-dessus de chacune de ses tangentes** :

$$\forall x, a \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

— **Concavité** : f est concave si $-f$ est convexe ; alors $f'' \leq 0$, la courbe est **sous ses tangentes** et **au-dessus de ses cordes**.

— **Point d'inflexion** : point où f'' **change de signe** ; la courbe y traverse sa tangente.

— **Inégalité de convexité (Jensen, cas fini)** : si f est convexe et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ avec $\lambda_i \geq 0$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

— Fonctions **convexes** usuelles : x^2, e^x, $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \geq 1$ sur $\mathbb{R}^+$, $-\ln$. Fonctions **concaves** : $\ln$, $\sqrt{\cdot}$, $\sin$ sur $[0\,;\pi]$.

Correction de l'exercice 1 – Convexité par la dérivée seconde

On calcule les deux dérivées successives.

— $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.

— $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 1$: f est **concave** sur $]-\infty\,;1]$.

— $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$: f est **convexe** sur $[1\,;+\infty[$.

— f'' change de signe en $x = 1$: le point d'abscisse 1 est un **point d'inflexion**. Son ordonnée est $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc le point $A(1\,;0)$.

Réponse. Concave sur $]-\infty\,;1]$, convexe sur $[1\,;+\infty[$, inflexion en $A(1\,;0)$.

Correction de l'exercice 2 – Convexité de l'exponentielle

Convexité : $\exp'' = \exp > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc exp est convexe.

Inégalité : on utilise la position au-dessus de la tangente en $a = 0$.

— $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$: la tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$.

— La convexité donne $\mathrm{e}^x \geq f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + x$ pour tout x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : en $x = -1$, $e^{-1} \approx 0{,}368 \geq 0$. En $x = 1$, $e \approx 2{,}718 \geq 2$. Cohérent.
— Cette inégalité est l'une des plus utiles de tout le programme (majorations, convergences, croissances comparées).

Réponse. $\exp'' > 0$, et tangente en 0 : $e^x \geq 1 + x$.

Correction de l'exercice 3 – Concavité du logarithme

ln est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln)''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: ln est **concave**.

— Une fonction concave est **sous ses tangentes**. Tangente en $a = 1$: $\ln 1 = 0$, $(\ln)'(1) = 1$, donc $y = x - 1$.
— D'où $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
— **Cas d'égalité** : posons $g(x) = x - 1 - \ln x$. Alors $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$, négatif sur $]0\,;1[$ et positif sur $]1\,;+\infty[$: g atteint son minimum en 1, où $g(1) = 0$. Le minimum est **strict** de part et d'autre, donc $g(x) > 0$ pour $x \neq 1$.
— **Conclusion** : égalité si et seulement si $x = 1$.

Réponse. Concavité + tangente en 1 ; égalité uniquement en $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 – Inégalité des cordes

On applique la définition de la convexité avec $x = 0$, $y = 1$ et $t = \dfrac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1\right) \leq \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1)$$

— Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.
— **Lecture géométrique** : le point de la courbe au milieu de l'intervalle est **sous** le milieu de la corde.
— **Exemple** : $f(x) = x^2$ donne $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Cohérent.

Réponse. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq \dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

Correction de l'exercice 5 – Inégalité de Bernoulli

On pose $f(t) = t^\alpha$ sur $]0\,;+\infty[$ (prolongée en 0).

— $f'(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \geq 0$ car $\alpha \geq 1$: f est **convexe**.
— La courbe est au-dessus de sa tangente en $t = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = \alpha$, tangente $y = 1 + \alpha(t-1)$.
— Donc $t^\alpha \geq 1 + \alpha(t-1)$ pour $t \geq 0$.
— On pose $t = 1 + x$ avec $x \geq -1$ (donc $t \geq 0$) : $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.
— **Contrôle** : $\alpha = 2$, $x = 0{,}5$: $2{,}25 \geq 2$. Cohérent.

Réponse. Convexité de t^α et tangente en $t = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Moyenne arithmétique et géométrique

La concavité de ln donne, pour $t = \dfrac{1}{2}$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b$$

— Le membre de droite vaut $\dfrac{1}{2}\ln(ab) = \ln\sqrt{ab}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Donc $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \ln\sqrt{ab}$.

— ln étant **strictement croissante**, on peut « enlever » les logarithmes : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

— **Égalité** si et seulement si $a = b$ (cas d'égalité stricte dans la concavité de ln).

— **Vérification directe** : $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. Cohérent.

Réponse. Concavité de ln : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, égalité si $a = b$.

Correction de l'exercice 7 – Somme de fonctions convexes

a) **Oui**. Si f et g sont convexes et deux fois dérivables, $(f+g)'' = f'' + g'' \geq 0$.

— Sans hypothèse de dérivabilité, on additionne directement les deux inégalités de convexité.

— De même, λf est convexe pour $\lambda \geq 0$.

b) **Non**. Prenons $f(x) = x$ et $g(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$: les deux sont convexes.

— Le produit vaut $h(x) = x^3 - x$, et $h''(x) = 6x$ change de signe en 0.

— h n'est donc **pas** convexe sur $\mathbb{R}$ (elle est concave sur $\mathbb{R}^-$).

— **Retenir** : la convexité est stable par somme et par combinaison positive, mais **pas** par produit.

Réponse. a) oui · b) non : $x \times (x^2 - 1) = x^3 - x$.

Correction de l'exercice 8 – Composition

Soient x, y dans l'intervalle et $t \in [0\,;1]$.

— **Convexité de** f : $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.

— g **croissante** : on peut appliquer g en conservant l'inégalité :

$$g(f(tx + (1-t)y)) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y))$$

— **Convexité de** g appliquée aux réels $f(x)$ et $f(y)$:

$$g(tf(x) + (1-t)f(y)) \leq t\,g(f(x)) + (1-t)\,g(f(y))$$

— En enchaînant les deux inégalités, $g \circ f$ vérifie la définition de la convexité.

— **L'hypothèse de croissance est indispensable** : avec $f(x) = x^2$ convexe et $g(u) = -u$ convexe mais décroissante, $g \circ f = -x^2$ est concave.

Réponse. Convexité de f, croissance puis convexité de g.

Correction de l'exercice 9 – Point d'inflexion et tangente traversée

Dérivées successives, en utilisant $(uv)' = u'v + uv'$:

— $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

— $f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

— $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc f'' a le signe de $x - 2$: f est **concave** sur $]-\infty\,;2]$ et **convexe** sur $[2\,;+\infty[$.

— **Point d'inflexion** en $x = 2$, d'ordonnée $f(2) = 2\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}271$.

— Remarque : le **maximum** de f est atteint en $x = 1$ (où f' change de signe), à ne pas confondre avec l'inflexion.

Réponse. Concave sur $]-\infty\,;2]$, convexe ensuite ; inflexion en $(2\,;2\mathrm{e}^{-2})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Inégalité de Jensen

On applique **Jensen** à la fonction concave ln avec les poids $\lambda_i = \frac{1}{n}$.

— Jensen pour une fonction concave : $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln x_i$.

— Le membre de droite vaut $\frac{1}{n}\ln(x_1 \cdots x_n) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})$.

— Par stricte croissance de ln, on conclut $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.

— C'est l'**inégalité arithmético-géométrique** générale ; l'égalité a lieu si et seulement si tous les x_i sont égaux.

— **Contrôle numérique** avec $n = 3$ et $(1\,;2\,;4)$: moyenne géométrique $\sqrt[3]{8} = 2$, moyenne arithmétique $\frac{7}{3} \approx 2{,}33$. Cohérent.

Réponse. Jensen pour ln concave avec des poids $\frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 11 – Convexité et pentes

C'est le **lemme des trois pentes**, conséquence directe de la convexité.

— On écrit b comme barycentre : $b = ta + (1-t)c$ avec $t = \frac{c-b}{c-a} \in]0\,;1[$.

— La convexité donne $f(b) \leq tf(a) + (1-t)f(c)$.

— En réorganisant cette inégalité, on obtient successivement

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

— **Interprétation** : les pentes des cordes **croissent** quand on décale l'intervalle vers la droite. C'est exactement la version « sans dérivée » de « f' est croissante ».

— **Exemple** : $f(x) = x^2$ avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$: pentes 1, 3, 4. Croissantes. Cohérent.

Réponse. Les trois pentes sont rangées dans cet ordre croissant.

Correction de l'exercice 12 – Synthèse : minimum d'une fonction convexe

On exploite la position de la courbe **au-dessus de sa tangente** en a.

— Pour tout x : $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

— Or $f'(a) = 0$, donc l'inégalité se réduit à $f(x) \geq f(a)$ pour tout réel x.

— Ainsi $f(a)$ est le **minimum global** de f sur $\mathbb{R}$.

— **Contraste avec le cas général** : pour une fonction quelconque, $f'(a) = 0$ ne donne qu'un point critique (x^3 en 0). La convexité transforme une information **locale** en information **globale** — c'est tout l'intérêt du chapitre, et le fondement de l'optimisation convexe.

Réponse. Tangente horizontale + courbe au-dessus des tangentes ⇒ minimum global.

Correction de l'exercice 13 – Convexe et majorée sur $\mathbb{R}$

a) Pour tout x :

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

b) Si $f'(a) > 0$, le membre de droite tend vers $+\infty$ en $+\infty$: f n'est pas majorée. De même si $f'(a) < 0$ en $-\infty$.

c) Donc $f'(a) = 0$ pour tout a : f est constante.

d) Non : $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, majorée par 1 et non constante. Sur une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

demi-droite, seule la direction « vers l'infini » est contrôlée : f est alors décroissante.

Réponse. Convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ ⇒ constante ; faux sur une demi-droite (e^{-x}).

Correction de l'exercice 14 – Inégalité de Young

a) Jensen pour ln concave avec les poids $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ de somme 1 :

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b$$

b) On passe à l'exponentielle (croissante). Égalité si et seulement si $a^p = b^q$ (stricte concavité de ln).

c) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, soit $(a-b)^2 \geq 0$.

d) $ab = 2$ et $\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \geq 2$ ✓.

Réponse. $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Correction de l'exercice 15 – Sinus des angles d'un triangle

a) $\sin'' = -\sin \leq 0$ sur $[0, \pi]$.

b) Jensen avec les poids $\frac{1}{3}$:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{A+B+C}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $(\ln\sin)'' = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = -\frac{1}{\sin^2} < 0$. Jensen : $\frac{1}{3}\sum \ln\sin A \leq \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où le produit $\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}650$.

d) $A = \frac{\pi}{2}$, $B = C = \frac{\pi}{4}$: somme $1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414 \leq 2{,}598$ ✓ ; produit $\frac{1}{2} \leq 0{,}650$ ✓.

Réponse. $\sum \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $\prod \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).