Plaquette 2 – Inégalités de convexité

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Jensen : f convexe, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

— Égalité, pour f **strictement** convexe et $\lambda_i > 0$, si et seulement si tous les x_i sont égaux.

— **IAG** : $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ $(x_i > 0)$.

— **Moyennes** : $\dfrac{n}{\sum 1/x_i} \leq \sqrt[n]{\prod x_i} \leq \dfrac{\sum x_i}{n} \leq \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n}}$.

— **Hölder** : $\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Correction de l’exercice 1 – Inégalité arithmético-géométrique

a) $\ln\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum \ln x_i = \ln \sqrt[n]{\prod x_i}$, puis exponentielle.

b) ln est strictement concave : égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

c) $abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = \dfrac{S^3}{27}$, avec égalité pour $a = b = c$.

d) IAG sur $1, 2, \ldots, n$:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

— Pour $n = 10$: $3\,628\,800 \leq 5{,}5^{10} \approx 25\,329\,516$ ✓.

Réponse. IAG par la concavité de ln ; $n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Correction de l’exercice 2 – Chaîne des moyennes

a) $\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum x_i^2$ (Jensen), puis racine.

b) $\sqrt[n]{\prod \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i}$, soit $\frac{1}{G} \leq \frac{1}{H}$.

c)

$$H = \frac{2}{1 + \frac{1}{4}} = 1{,}6 \leq G = 2 \leq A = 2{,}5 \leq Q = \sqrt{8{,}5} \approx 2{,}92$$

d) Pour une distance d : temps $\frac{d}{60} + \frac{d}{40}$, vitesse $\frac{2d}{d/60 + d/40} = 48$ km/h : la **moyenne harmonique**, et non 50.

Réponse. $H \leq G \leq A \leq Q$; vitesse moyenne 48 km/h (harmonique).

Correction de l’exercice 3 – Moyennes de puissances

a) $\frac{q}{p} > 1$: dérivée seconde $\frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} - 1\right) x^{q/p - 2} \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b)

$$\left(\frac{1}{n}\sum y_i\right)^{q/p} \le \frac{1}{n}\sum y_i^{q/p} = \frac{1}{n}\sum x_i^q$$

— soit $M_p^q \le M_q^q$.

c) $M_1 = 2$, $M_2 = \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2{,}160$, $M_3 = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}289$: croissantes ✓.

d) $n^{-1/p}\max x_i \le M_p \le \max x_i$ et $n^{-1/p} \to 1$.

Réponse. $p \mapsto M_p$ est croissante, de limite $\max x_i$.

Correction de l'exercice 4 – Inégalités de Hölder et Cauchy-Schwarz

a) $\frac{a_i b_i}{AB} \le \frac{a_i^p}{pA^p} + \frac{b_i^q}{qB^q}$; en sommant :

$$\frac{\sum a_i b_i}{AB} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

b) C'est $\sum a_i b_i \le AB$.

c) $\sum a_i b_i = 32$ et $\sqrt{14}\sqrt{77} = \sqrt{1078} \approx 32{,}83$ ✓.

d) Cauchy-Schwarz avec $b = (1,1,1)$: $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$.

Réponse. $\sum a_i b_i \le \|a\|_p \|b\|_q$; Cauchy-Schwarz pour $p = 2$.

Correction de l'exercice 5 – Inégalité de Nesbitt

a) $f(x) = -1 + \frac{S}{S-x}$, $f'(x) = \frac{2S}{(S-x)^3} > 0$.

b) $\frac{a}{b+c} = f(a)$ etc. Jensen avec les poids $\frac{1}{3}$:

$$\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \ge f\left(\frac{S}{3}\right) = \frac{S/3}{2S/3} = \frac{1}{2}$$

c) $a = b = c$ (stricte convexité).

d) $\frac{1}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{3} = 1{,}7 \ge 1{,}5$ ✓.

Réponse. $\sum \frac{a}{b+c} \ge \frac{3}{2}$, égalité si $a = b = c$.

Correction de l'exercice 6 – Entropie maximale

a) $\varphi' = \ln x + 1$, $\varphi'' = \frac{1}{x} > 0$.

b) $\varphi\left(\frac{1}{n}\sum p_i\right) \le \frac{1}{n}\sum \varphi(p_i)$, soit

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sum p_i \ln p_i \quad\Longrightarrow\quad H \le \ln n$$

c) Égalité si et seulement si les p_i sont égaux : la loi **uniforme** est la plus « incertaine ».

d) $H = \frac{1}{2}\cdot 1 + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 = 1{,}5$ bit $\le \log_2 3 \approx 1{,}585$ ✓.

Réponse. $H \le \ln n$, égalité pour la loi uniforme ; $1{,}5 \le 1{,}585$ bits.

Correction de l'exercice 7 – Inégalité de Gibbs

a) Jensen, poids p_i, points $\frac{q_i}{p_i}$.

b) $\ln\sum q_i = \ln 1 = 0$, donc $\sum p_i \ln\frac{q_i}{p_i} \le 0$. Égalité si et seulement si les $\frac{q_i}{p_i}$ sont tous égaux,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donc égaux à 1.

c) $q_i = \frac{1}{n}$: $D = \sum p_i \ln p_i + \ln n = \ln n - H \geq 0$.

d)

$$D = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}144$$

Réponse. $D(p\|q) \geq 0$, nul si et seulement si $p = q$; ici $\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 8 – Puissances d'une somme

a) Jensen pour x^p convexe : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$, puis multiplier par 2^p.

b) Pour $b > 0$, $t = \frac{a}{b}$: $g(t) = (1+t)^p - 1 - t^p$, $g(0) = 0$ et $g'(t) = p\left((1+t)^{p-1} - t^{p-1}\right) \leq 0$ car $p - 1 \leq 0$. Donc $g \leq 0$.

c) Même fonction avec $p \geq 1$: $g' \geq 0$, $g \geq 0$.

d) $p = 2$: $16 \leq 2 \cdot 10 = 20$ et $16 \geq 10$ ✓. $p = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{4} = 2 \leq 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73$$

Réponse. $a^p + b^p \leq (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ pour $p \geq 1$; sous-additivité pour $p \leq 1$.

Correction de l'exercice 9 – Produit de facteurs 1 + a_i

a) $\psi' = \frac{e^x}{1+e^x}$, $\psi'' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$.

b) $\psi\left(\frac{1}{n}\sum \ln a_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum \ln(1+a_i)$, soit $\ln(1+G) \leq \frac{1}{n}\ln\prod(1+a_i)$:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq (1+G)^n$$

c) $G = 1$.

d) $5 \times \frac{5}{4} = 6{,}25 \geq 4$ ✓.

Réponse. $\prod(1+a_i) \geq (1+G)^n$; si le produit vaut 1, $\geq 2^n$.

Correction de l'exercice 10 – Tangentes d'un triangle acutangle

a) $\tan'' = 2\tan(1+\tan^2) \geq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Jensen :

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} \geq \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

c) $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$, d'où $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$.

d) Immédiat. $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$, $\tan\frac{\pi}{6} \approx 0{,}577$: somme $\approx 8{,}04$, produit $(2+\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 8{,}04$ ✓ $\geq 5{,}196$.

Réponse. $\sum \tan A = \prod \tan A \geq 3\sqrt{3}$ dans un triangle acutangle.

Correction de l'exercice 11 – Cordes et tangentes de fonctions usuelles

a) $2^x = e^{x\ln 2}$ est convexe : sous sa corde entre $(0,1)$ et $(1,2)$, qui est $y = 1 + x$; au-dessus de sa tangente en 0, $y = 1 + x\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\ln(1+x)$ est concave : au-dessus de sa corde $y = x\ln 2$ sur $[0,1]$, sous sa tangente $y = x$ en 0.

c)

$$0{,}5\ln 2 \approx 0{,}347 \le \ln 1{,}5 \le 0{,}5$$

— (valeur 0,405).

d) sin concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: au-dessus de sa corde de $(0,0)$ à $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $y = \frac{2x}{\pi}$.

Réponse. Convexe : sous la corde, au-dessus des tangentes (et inversement pour concave).

Correction de l'exercice 12 – Maximiser un produit sous contrainte

a) $xyz \le \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$, atteint pour $x = y = z = 4$.

b) $x \cdot 2y \cdot 3z \le \left(\frac{18}{3}\right)^3 = 216$, donc $xyz \le 36$, atteint pour $x = 2y = 3z = 6$: $(6,3,2)$.

c)

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y \le \left(\frac{x/2 + x/2 + y}{3}\right)^3 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x^2 y \le 4$$

— atteint pour $\frac{x}{2} = y = 1$: $x = 2$, $y = 1$.

d) $g(x) = x^2(3-x)$, $g'(x) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$: maximum en 2, $g(2) = 4$ ✓.

Réponse. a) 64 ; b) 36 en $(6,3,2)$; c) 4 en $(2,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Croissance de $(1+1/n)^n$ par l'IAG

a) Moyenne arithmétique : $\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)} \le 1 + \frac{1}{n+1}$$

b) En élevant à la puissance $n+1$: $u_n \le u_{n+1}$.

c) Moyenne $\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$, et en inversant : $v_n \ge v_{n+1}$.

d) $u_n \le v_n$, $v_n - u_n = \frac{u_n}{n} \to 0$: suites adjacentes, limite e. $u_{10} \approx 2{,}594 \le \mathrm{e} \le v_{10} \approx 2{,}853$.

Réponse. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow \mathrm{e}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow \mathrm{e}$.

Correction de l'exercice 14 – Variance et convexité

a) $x \mapsto x^2$ est convexe : $\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum x_i^2$.

b) $V \ge 0$; stricte convexité : égalité si et seulement si les x_i sont égaux.

c) C'est a) multiplié par n^2.

d)

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

— égalité en $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Réponse. $V \ge 0$; $x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{1}{3}$ si $x + y + z = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Inégalité de Jensen pondérée et placements

a) $1+\tau=\sqrt[n]{\prod(1+t_i)}\le\frac{1}{n}\sum(1+t_i)=1+\bar{t}$.

b) $\bar{t}=0$ mais

$$1000\times1{,}5\times0{,}5=750\ \text{€},\qquad \tau=\sqrt{0{,}75}-1\approx-13{,}4\,\%$$

c) C’est $H\le G$ appliqué aux $1+t_i$.

d) L’écart $\bar{t}-\tau$ croît avec la dispersion des taux (stricte concavité de ln) : à moyenne arithmétique égale, plus les taux varient, plus le rendement réel est faible.

Réponse. $\tau\le\bar{t}$; $+50\,\%$ puis $-50\,\%$: 750 €, $\tau\approx-13{,}4\,\%$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).