Plaquette 3 – Propriétés des fonctions convexes

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Trois pentes : f convexe, $x < y < z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

— **Sup** de fonctions convexes : convexe. **Somme**, **multiple positif** : convexe.

— g convexe **croissante**, f convexe $\Rightarrow g \circ f$ convexe.

— f convexe sur un intervalle **ouvert** $\Rightarrow$ continue, dérivable à gauche et à droite, $f'_g \leq f'_d$.

— Un minimum **local** d'une fonction convexe est **global**.

Correction de l'exercice 1 – Démonstration des trois pentes

a) $t = \frac{z-y}{z-x}$, $1-t = \frac{y-x}{z-x}$.

b) Définition de la convexité avec ce t.

c) Multiplier par $z-x$: $(z-x)f(y) \leq (z-y)f(x) + (y-x)f(z)$. En écrivant $z-y = (z-x)-(y-x)$:

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x))$$

— c'est la première inégalité ; la seconde s'obtient en écrivant $y-x = (z-x)-(z-y)$.

d) Pentes 1, 3, 4 : $1 \leq 3 \leq 4$ ✓.

Réponse. Les pentes des cordes croissent avec les extrémités.

Correction de l'exercice 2 – Dérivées latérales d'une fonction convexe

a) Conséquence directe des trois pentes (en distinguant les positions de x, x' par rapport à a).

b) Sur $]a, +\infty[\cap I$, τ_a est croissante et minorée par $\tau_a(x_0)$ pour un $x_0 < a$: limite à droite finie, $f'_d(a) = \inf_{x>a} \tau_a(x)$. De même à gauche, $f'_g(a) = \sup_{x<a} \tau_a(x) \leq f'_d(a)$.

c) Pour $a < b$, par les trois pentes et b) :

$$f'_d(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)$$

d) $|x| + x^2$: $f'_g(0) = -1$, $f'_d(0) = 1$. $\max(x, 2x)$: x pour $x \leq 0$, $2x$ pour $x \geq 0$: $f'_g(0) = 1$, $f'_d(0) = 2$.

Réponse. Dérivées latérales partout, $f'_g \leq f'_d$, f'_d croissante.

Correction de l'exercice 3 – Continuité d'une fonction convexe

a) Dérivable à gauche et à droite en a entraîne continue à gauche et à droite.

b) Pour $c \leq x < y \leq d$, trois pentes :

$$\frac{f(c)-f(c')}{c-c'} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(d')-f(d)}{d'-d}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— les pentes sont bornées : f est K-lipschitzienne sur $[c,d]$.

c) $f=0$ sur $[0,1[$, $f(1)=1$: convexe (toute corde est au-dessus), discontinue en 1.

d) f' est croissante (convexité) ; une fonction croissante n'a que des discontinuités de saut, et une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pas de saut possible.

Réponse. Convexe sur un ouvert ⇒ continue, localement lipschitzienne ; convexe dérivable ⇒ C^1.

Correction de l'exercice 4 – Sup de fonctions convexes

a) Pour chaque f_i : $f_i(tx+(1-t)y)\le tf_i(x)+(1-t)f_i(y)\le tF(x)+(1-t)F(y)$; on passe au sup à gauche.

b) $|x|=\max(x,-x)$; les autres sont des max de convexes (affines ou x^2).

c) Sup de fonctions affines en x : convexe. Pour x fixé, $t\mapsto tx-t^2$ est maximale en $t=\frac{x}{2}$ si $\frac{x}{2}\in[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \frac{x^2}{4} & 0\le x\le 2\\ x-1 & x\ge 2\end{cases}$$

d) Non : $\min(x^2,(x-2)^2)$ n'est pas convexe (valeur 1 en 1, au-dessus de la corde nulle entre 0 et 2).

Réponse. Le sup de convexes est convexe ; le inf ne l'est pas en général.

Correction de l'exercice 5 – Composition et convexité

a) $f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$; g croissante puis convexe :

$$g(f(tx+(1-t)y))\le g(tf(x)+(1-t)f(y))\le tg(f(x))+(1-t)g(f(y))$$

b) exp est convexe croissante et x^2, $|x|$ sont convexes ; $u\mapsto u^3$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$ où vit x^2+1.

c) $(x^2-1)^2$ vaut 0 en ±1 et 1 en 0 : au-dessus de sa corde, non convexe.

d) $u\mapsto u^2$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$: oui. Sans $f\ge 0$: $f(x)=x^2-1$ donne encore $(x^2-1)^2$, non convexe.

Réponse. g convexe croissante $\circ$ f convexe est convexe ; la croissance est indispensable.

Correction de l'exercice 6 – Minimum d'une fonction convexe

a) $f(a+t(x-a))\le(1-t)f(a)+tf(x)<f(a)$ pour tout $t\in]0,1]$: des points arbitrairement proches de a ont une valeur plus petite, contradiction.

b) Si $m=f(x)=f(y)$ est le minimum, pour $z\in[x,y]$: $f(z)\le\max(f(x),f(y))=m$, donc $f(z)=m$.

c) Si $f(x)=f(y)=m$ avec $x\neq y$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}=m$$

— contradiction.

d) Somme de convexes et de x^2 strictement convexe : strictement convexe, tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$, donc minimum atteint (fonction continue coercive) en un unique point.

Réponse. Minimum local = global ; ensemble des minimiseurs = intervalle ; unique si strictement convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Convexité par le point milieu

a) Pour $n = 1$ c'est l'hypothèse. Si $t = \frac{k}{2^{n+1}}$ avec k impair, t est le milieu de $t_1 = \frac{k-1}{2^{n+1}}$ et $t_2 = \frac{k+1}{2^{n+1}}$, qui sont de rang n. Le point $tx + (1-t)y$ est le milieu des points correspondants, d'où

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{1}{2}(t_1 f(x) + (1-t_1)f(y)) + \frac{1}{2}(t_2 f(x) + (1-t_2)f(y))$$

— et le membre de droite vaut $tf(x) + (1-t)f(y)$.

b) Pour t réel, $t_n \to t$ dyadiques ; les deux membres sont continus en t.

c) $-\ln\frac{x+y}{2} \leq -\ln\sqrt{xy} = \frac{-\ln x - \ln y}{2}$; $-\ln$ est continue : convexe.

d) Oui : une fonction additive g non linéaire vérifie $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$ mais n'est pas convexe (sinon elle serait continue, donc linéaire).

Réponse. Convexité du milieu + continuité ⇒ convexité.

Correction de l'exercice 8 – Fonctions log-convexes

a) $f = \exp \circ \ln f$: composée de $\ln f$ convexe par exp convexe croissante.

b) $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$, dérivée seconde $\frac{1}{x^2} > 0$. $\ln x^x = x\ln x$, dérivée seconde $\frac{1}{x} > 0$.

c) Non : $\ln x^2 = 2\ln x$ est concave, alors que x^2 est convexe.

d)

$$\ln(fg) = \ln f + \ln g$$

— somme de convexes.

Réponse. Log-convexe ⇒ convexe (réciproque fausse : x^2).

Correction de l'exercice 9 – Convexe avec limite finie

a) Trois pentes avec le point fixe 0. Une fonction croissante a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et $\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \to 0$.

b) Si $f(y) > f(x)$ pour $x < y$, la pente $p > 0$ de cette corde minore les pentes plus à droite : pour $z > y$, $f(z) \geq f(y) + p(z-y) \to +\infty$. Contradiction.

c) Si $f'_d(a) \neq 0$ en un point, la tangente à droite minore f et tend vers $+\infty$ d'un côté. Si $f'_d = 0$ partout, f est constante (ses pentes de cordes sont encadrées par des dérivées latérales nulles).

d)

$$\frac{e^{-x}}{x} \to 0, \qquad \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \to 1, \qquad \frac{x\ln x}{x} = \ln x \to +\infty$$

Réponse. $\frac{f(x)}{x}$ a une limite ; convexe avec limite finie en $+\infty$ ⇒ décroissante.

Correction de l'exercice 10 – Suites convexes

a) Si $\Delta_N > 0$, alors $\Delta_n \geq \Delta_N$ pour $n \geq N$ et $u_n \geq u_N + (n-N)\Delta_N \to +\infty$: non bornée.

b) $\Delta_n \leq 0$: décroissante, minorée, convergente. (Δ_n) est croissante majorée par 0, de limite $\ell \leq 0$; si $\ell < 0$, $u_n \to -\infty$. Donc $\Delta_n \to 0$.

c) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} = \frac{2}{n(n^2-1)} > 0$. Pour la seconde : $x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

convexe (inverse d'une fonction concave positive), et ses valeurs aux entiers forment une suite convexe.

d) $\frac{u_n - u_0}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k<n}\Delta_k$ est la moyenne des Δ_k, suite croissante : cette moyenne converge vers $\lim \Delta_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (Césaro).

Réponse. Suite convexe bornée ⇒ décroissante, convergente, $\Delta_n \to 0$.

Correction de l'exercice 11 – Maximum d'une fonction convexe sur un segment

a) $f(tx + (1-t)y) \le tf(a) + (1-t)f(b) \le \max(f(a), f(b))$.

b) Convexe : $\max = \max(f(-1), f(2)) = \max(5, -1) = 5$.

c) Valeurs aux bornes $1 - p + q$ et $1 + p + q$: le maximum est

$$\max(1 - p + q, 1 + p + q) = 1 + |p| + q$$

d) g est convexe (somme d'exponentielles) :
$\max(g(-1), g(1)) = \max(e^{-1} + e^{2}, e + e^{-2}) \approx \max(7{,}76; 2{,}85) = e^{2} + e^{-1}$.

Réponse. Une fonction convexe atteint son maximum sur un segment à une extrémité.

Correction de l'exercice 12 – Épigraphe et convexité

a) Si f est convexe et $(x, y), (x', y') \in E$:

$$f(tx + (1-t)x') \le tf(x) + (1-t)f(x') \le ty + (1-t)y'$$

— donc le point intermédiaire est dans E. Réciproquement, appliquer la convexité de E aux points $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$.

b) $y \ge \sup f_i(x) \Leftrightarrow \forall i, y \ge f_i(x)$; une intersection de convexes est convexe.

c) Un demi-plan $\{y \ge ax + b\}$ au-dessus d'une droite non verticale est l'épigraphe de $ax + b$.

d) $|x|$: un « V » plein, intersection de deux demi-plans. x^2 : l'intérieur de la parabole, bord compris.

Réponse. f convexe ⇔ épigraphe convexe.

Correction de l'exercice 13 – Inégalité f(x + h) + f(x − h) ≥ 2f(x)

a) C'est la convexité au milieu de $x - h$ et $x + h$.

b) Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)$$

— en sommant : $f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + o(h^2)$.

c) Le quotient est ≥ 0 par a), sa limite aussi.

d) $\frac{\sin 1{,}01 + \sin 0{,}99 - 2\sin 1}{10^{-4}} \approx -0{,}84147$, et $f''(1) = -\sin 1 \approx -0{,}84147$ ✓ (écart d'ordre h^2).

Réponse. Différence seconde ≥ 0 pour f convexe, et $\sim h^2 f''(x)$.

Correction de l'exercice 14 – Distance à un intervalle

a) $d(x) = a - x$ si $x \le a$, 0 sur $[a, b]$, $x - b$ si $x \ge b$.

b)

$$d(x) = \max(a - x, 0, x - b)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— max de trois fonctions affines.

c) Pentes -1, 0, 1 : $|d(x) - d(y)| \leq |x - y|$.

d) Un intervalle est convexe ; le même calcul s'applique. Pour $\{0, 1\}$: $d(0) = d(1) = 0$ et $d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$: non convexe.

Réponse. $\operatorname{dist}(x, [a, b]) = \max(a - x, 0, x - b)$, convexe et 1-lipschitzienne.

Correction de l'exercice 15 – Convexité stricte sans f'' > 0

a) $f'' = 12x^2 \geq 0$, nulle seulement en 0 : f' est strictement croissante, d'où la stricte convexité (les pentes des cordes, égales à $f'(c)$ par les accroissements finis, croissent strictement).

b) Même argument : f' strictement croissante.

c) $f'' = \sin x$ change de signe sur $\mathbb{R}$; sur $[0, \pi]$, $\sin \geq 0$, nulle seulement aux bornes.

d) $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch} > 0$. $(\ln \operatorname{ch})' = \operatorname{th}$ et

$$(\ln \operatorname{ch})'' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0$$

Réponse. $f'' \geq 0$ nulle en des points isolés suffit à la stricte convexité (x^4).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).