Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : convexité

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Transformée de Legendre d'une fonction f :

$$f^*(p) = \sup_x (px - f(x))$$

— f^* est convexe (sup de fonctions affines en p) et $px \leq f(x) + f^*(p)$ (**Fenchel-Young**).
— **Jensen probabiliste** : f convexe, X variable aléatoire finie : $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
— Une fonction convexe dérivable est le **sup de ses tangentes**.
— f convexe avec $f(0) = 0$: $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 1 – Transformée de Legendre

a) $x \mapsto px - \frac{x^2}{2}$ est maximale en $x = p$: $f^*(p) = \frac{p^2}{2}$ (la parabole est son propre transformé).

b) $p < 0$: $px - \mathrm{e}^x \to +\infty$ en $-\infty$, $f^*(p) = +\infty$. $p = 0$: $\sup(-\mathrm{e}^x) = 0$. $p > 0$: maximum en $x = \ln p$:

$$f^*(p) = p\ln p - p$$

c) Pour $p > 0$, maximum en $x^{a-1} = p$, soit $x = p^{1/(a-1)} = p^{b-1}$; alors $px - \frac{x^a}{a} = p^b - \frac{p^b}{a} = \frac{p^b}{b}$ (car $(b-1)a = b$). Par symétrie pour $p < 0$.

d) $px \leq \frac{x^a}{a} + \frac{p^b}{b}$: c'est Young.

Réponse. $\left(\frac{x^2}{2}\right)^* = \frac{p^2}{2}$; $(\mathrm{e}^x)^* = p\ln p - p$; $\left(\frac{|x|^a}{a}\right)^* = \frac{|p|^b}{b}$.

Correction de l'exercice 2 – Jensen pour l'espérance

a) $f\left(\sum p_i x_i\right) \leq \sum p_i f(x_i)$.

b) $E[X] = 3{,}5$, $E[X^2] = \frac{91}{6} \approx 15{,}17 \geq 12{,}25$ ✓. $\mathrm{e}^{3{,}5} \approx 33{,}1 \leq E[\mathrm{e}^X] \approx 106{,}1$ ✓.

c) $f(x) = x^2$.

d) Utilité certaine $\ln 100 \approx 4{,}605$; pari :

$$\frac{\ln 50 + \ln 150}{2} = \ln\sqrt{7500} \approx 4{,}461 < 4{,}605$$

— il préfère la somme certaine : l'**aversion au risque** est la concavité de l'utilité.

Réponse. $f(E[X]) \leq E[f(X)]$; utilité concave ⇒ aversion au risque.

Correction de l'exercice 3 – Rouler à vitesse constante

a) $E = \frac{kT}{2}(v_1^3 + v_2^3)$, distance $\frac{T}{2}(v_1 + v_2)$.

b) $v \mapsto v^3$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$: Jensen

$$\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)^3 \leq \frac{v_1^3 + v_2^3}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $60^3 + 100^3 = 1\,216\,000$ contre $2 \cdot 80^3 = 1\,024\,000$: surcoût $\approx 18{,}75\,\%$.

d) $\frac{1}{n}\sum v_i^3 \geq \overline{v}^3$: la vitesse constante est optimale.

Réponse. Vitesse constante optimale ; $(60, 100)$ coûte $18{,}75\,\%$ de plus que 80 constant.

Correction de l'exercice 4 – Triangle d'aire maximale à périmètre fixé

a) $(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3s-2s = s$, donc $(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{s}{3}\right)^3$.

b) $A^2 \leq s \cdot \frac{s^3}{27}$, d'où

$$A \leq \frac{s^2}{\sqrt{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

— égalité si et seulement si $s-a = s-b = s-c$.

c) $s = 6$: $A \leq \frac{36}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm² (équilatéral de côté 4).

d) $(3, 4, 5)$: rectangle, aire 6 cm² $< 6{,}93$ ✓.

Réponse. $A \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$; pour un périmètre de 12 : $4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm².

Correction de l'exercice 5 – Impôt progressif et quotient

a) $T(R) = \max(0,\ 0{,}11(R - 10\,000),\ 1980 + 0{,}3(R - 28\,000))$: max de fonctions affines.

b) $T(50\,000) = 1980 + 6600 = 8580$; $T(10\,000) = 0$; $T(30\,000) = 1980 + 600 = 2580$.

c) Séparément : 8580 € ; quotient : $2 \times 2580 = 5160$ €. Jensen :

$$2T\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) \leq T(R_1) + T(R_2)$$

— économie 3420 €, d'autant plus forte que les revenus sont inégaux.

d) Non : T linéaire, égalité dans Jensen.

Réponse. Séparément 8580 €, avec quotient 5160 € ; c'est la convexité du barème.

Correction de l'exercice 6 – Superadditivité

a) $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$: pente de la corde issue de 0, croissante (trois pentes).

b) Par a), $\frac{f(a)}{a} \leq \frac{f(a+b)}{a+b}$ et de même pour b ; en sommant

$$f(a) + f(b) \leq \frac{a+b}{a+b} f(a+b) = f(a+b)$$

c) x^p et $e^x - 1$ sont convexes, nulles en 0.

d) Inégalités inversées : sous-additivité, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Réponse. f convexe, $f(0) = 0 \Rightarrow f(a) + f(b) \leq f(a+b)$; concave : l'inverse.

Correction de l'exercice 7 – Le max adouci (log-sum-exp)

a) $e^{\max} \leq \sum e^{x_i} \leq n\, e^{\max}$, puis ln.

b) $L \approx 3{,}408 \in [3; 3 + \ln 3] \approx [3; 4{,}10]$.

c) $\max \leq L_\beta \leq \max + \frac{\ln n}{\beta}$.

d) Avec $u = e^{a+tc}$, $v = e^{b+td}$: dérivée $\frac{cu + dv}{u + v}$, puis

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{(c^2u + d^2v)(u+v) - (cu+dv)^2}{(u+v)^2} = \frac{uv(c-d)^2}{(u+v)^2} \geq 0$$

Réponse. $\max \leq L \leq \max + \ln n$; $L_\beta \to \max$; L est convexe.

Correction de l'exercice 8 – Moindres carrés et convexité

a) $S(a) = \sum x_i^2\, a^2 - 2\sum x_i y_i\, a + \sum y_i^2$: trinôme de coefficient dominant $14 > 0$.

b)

$$a^* = \frac{2+6+21}{1+4+9} = \frac{29}{14} \approx 2{,}071$$

— $S(a^*) = \sum y_i^2 - \dfrac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} = 62 - \dfrac{841}{14} \approx 1{,}93$.

c) $S'(a) = 2a\sum x_i^2 - 2\sum x_i y_i = 0$.

d) Une fonction convexe est au-dessus de sa tangente horizontale au point critique : minimum global (et unique si stricte).

Réponse. $a^* = \frac{29}{14} \approx 2{,}07$, $S_{\min} \approx 1{,}93$.

Correction de l'exercice 9 – Newton pour minimiser

a) $f' = \mathrm{e}^x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

b) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f'(x_n)}{f''(x_n)} = x_n - \dfrac{\mathrm{e}^{x_n} - 2}{\mathrm{e}^{x_n}}$.

c) $x_1 = 1$ (erreur 0,31), $x_2 = 2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}7358$ ($4{,}3 \cdot 10^{-2}$), $x_3 \approx 0{,}69404$ ($9 \cdot 10^{-4}$), $x_4 \approx 0{,}6931476$ ($4 \cdot 10^{-7}$) : convergence quadratique.

d) $g = f'$ est convexe croissante : depuis un point où $g > 0$ les itérés décroissent vers $\ln 2$; depuis un point où $g < 0$, le premier pas passe à droite de $\ln 2$ (la tangente minore g), puis on est ramené au cas précédent.

Réponse. $x_{n+1} = x_n - 1 + 2\mathrm{e}^{-x_n}$; $x_4 \approx 0{,}693148$.

Correction de l'exercice 10 – Normes ℓ^p et moyennes

a) 6 ; $\sqrt{14} \approx 3{,}742$; $\sqrt[3]{36} \approx 3{,}302$; 3.

b) Par homogénéité, supposer $\|x\|_q = 1$: $x_i \leq 1$ donc $x_i^p \geq x_i^q$ et $\|x\|_p^p \geq \sum x_i^q = 1$, soit $\|x\|_p \geq 1 = \|x\|_q$.

c) Le facteur $n^{-1/p}$ croît avec p et compense : les normes (sommes) décroissent, les moyennes (sommes normalisées) croissent.

d) Inégalité de gauche : b). Droite : $M_p \leq M_q$ donne

$$n^{-1/p}\|x\|_p \leq n^{-1/q}\|x\|_q$$

Réponse. $\|x\|_p$ décroît en p, M_p croît : $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p - 1/q}\|x\|_q$.

Correction de l'exercice 11 – Étaler augmente la somme convexe

a) $a = tx + (1-t)y$ et $b = (1-t)x + ty$ avec $t = \dfrac{y-a}{y-x}$; on vérifie $a + b = x + y$.

b) Convexité :

$$f(a) + f(b) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + (1-t)f(x) + tf(y) = f(x) + f(y)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Rapprocher diminue : minimum en $u = v = 5$ dans les deux cas (50 et $2\mathrm{e}^5$).

d) Pour f concave, l'inégalité s'inverse : $\sin A + \sin B$ croît quand A et B se rapprochent ; on retrouve le maximum pour le triangle équilatéral.

Réponse. Pour f convexe, écarter deux points (à somme fixée) augmente $f(a) + f(b)$.

Correction de l'exercice 12 – Barycentre et moindres carrés dans le plan

a) $F(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ avec $\varphi(x) = \sum (x - a_i)^2$, trinôme convexe.

b) φ est minimale en $\overline{a}$, ψ en $\overline{b}$: $G = (\overline{a}, \overline{b})$.

c) $\varphi(x) = \varphi(\overline{a}) + n(x - \overline{a})^2$ (développer autour de $\overline{a}$, le terme croisé est nul), de même pour ψ :

$$F(M) = F(G) + nMG^2$$

d) $G = \left(\frac{4}{3}, 2\right)$. $F(G) = \left(\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{16}{9}\right) + (4 + 4 + 16) = \frac{96}{9} + 24 \approx 34{,}67$.

Réponse. Le minimiseur est l'isobarycentre ; $F(M) = F(G) + nMG^2$; ici $F(G) = \frac{104}{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Taux équivalents et Bernoulli

a) $\varphi(t) = (1 + t)^\alpha$: $\varphi'' = \alpha(\alpha - 1)(1 + t)^{\alpha - 2}$, positive pour $\alpha \geq 1$ (au-dessus de la tangente en 0, $y = 1 + \alpha t$), négative pour $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Taux mensuel τ : $(1 + \tau)^{12} = 1{,}12$, donc

$$\tau = 1{,}12^{1/12} - 1 \approx 0{,}949\,\% < 1\,\%$$

c) Avec $\alpha = \frac{1}{12}$: $(1 + t)^{1/12} \leq 1 + \frac{t}{12}$.

d) $1{,}01^{12} - 1 \approx 12{,}68\,\%$.

Réponse. Taux mensuel équivalent à 12 % annuel : 0,949 % ; 1 % mensuel ≈ 12,68 % annuel.

Correction de l'exercice 14 – Une fonction convexe est le sup de ses tangentes

a) Chaque tangente minore f (convexité), et pour $a = x$ on a égalité : le sup est atteint et vaut $f(x)$.

b) $\mathrm{e}^x = \sup_a \mathrm{e}^a(1 + x - a)$; avec $a = 0$: $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.

c) $2ax - a^2 = x^2 - (x - a)^2 \leq x^2$, égalité en $a = x$:

$$x^2 = \sup_{a \in \mathbb{R}} (2ax - a^2)$$

d) Réciproquement, un sup de fonctions affines est convexe : « f convexe dérivable » ⇔ « f est le sup de ses tangentes ».

Réponse. $f(x) = \max_a (f(a) + f'(a)(x - a))$ pour f convexe dérivable.

Correction de l'exercice 15 – Inégalité de Hermite en discret

a) $\frac{a + b}{2}$ est le milieu de x_k et x_{n-k} : convexité au milieu.

b) Sommer a) sur $k = 0, \ldots, n$ (chaque terme apparaît deux fois) et diviser par $n + 1$.

c) x_k est le barycentre de a et b avec les poids $\frac{n-k}{n}$, $\frac{k}{n}$. En sommant :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k}{n}f(a)+\frac{k}{n}f(b)\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

d) Points 0, $\frac{1}{2}$, 1 : $\frac{1}{4}\le\frac{0+\frac{1}{4}+1}{3}=\frac{5}{12}\approx 0{,}417\le\frac{1}{2}$ ✓ (la moyenne continue serait $\frac{1}{3}$).

Réponse. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{n+1}\sum f(x_k)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).