Plaquette 4 – Convexité, études de fonctions et approximations

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La convexité donne des **positions** : courbe au-dessus des tangentes, au-dessous des cordes, au-dessus d'une asymptote oblique en l'infini. On en déduit des **encadrements** (tangente et corde fournissent une borne inférieure et une borne supérieure), le **nombre d'intersections** avec une droite (au plus deux pour une fonction strictement convexe), et la **monotonie** des méthodes d'approximation (Newton, fausse position) : pour une fonction convexe croissante, les itérés approchent la racine d'un seul côté. On localise les **points d'inflexion** par le changement de signe de f''.

Exercice 1 – Points d'inflexion d'une cubique

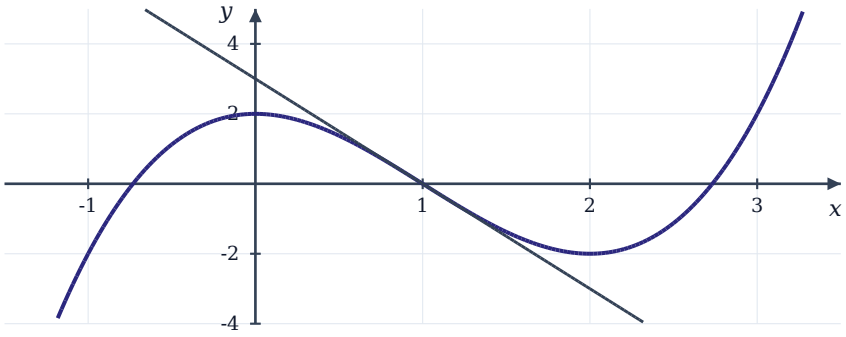
Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Étudier la convexité de f et déterminer son point d'inflexion I.

b) Écrire la tangente en I et étudier la position de la courbe par rapport à elle.

c) Montrer que I est centre de symétrie de la courbe.

d) Montrer que toute cubique $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) a exactement un point d'inflexion, centre de symétrie.



La cubique (épaisse) et sa tangente en I

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Courbe en cloche

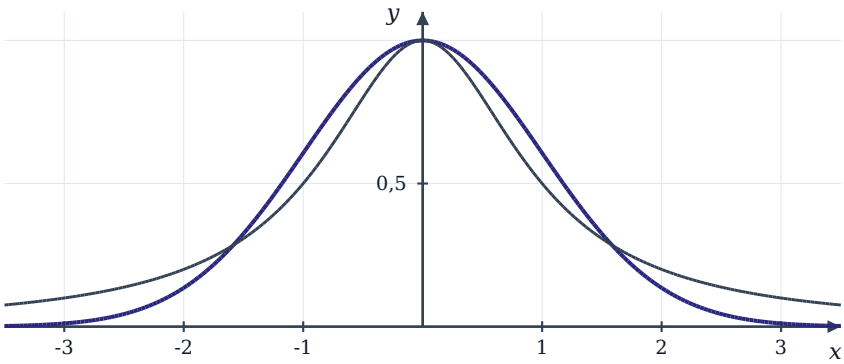
Soit $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

a) Calculer g'' et déterminer les points d'inflexion.

b) Écrire les tangentes aux points d'inflexion et calculer leurs intersections avec l'axe des abscisses.

c) Sur quel intervalle g est-elle concave ? Interpréter en statistique (écart type).

d) Même étude pour $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.



e^(−x²/2) (épaisse) et 1/(1 + x²)

Exercice 3 – La sigmoïde

Soit $\sigma(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Montrer que $\sigma' = \sigma(1-\sigma)$.

b) Calculer σ'' et étudier la convexité ; point d'inflexion ?

c) Montrer que $\sigma(x) + \sigma(-x) = 1$ et interpréter.

d) Montrer que $\sigma(x) \le \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$ pour $x \ge 0$ et l'inégalité inverse pour $x \le 0$.

Exercice 4 – Newton pour une fonction convexe

Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$, convexe, strictement croissante, avec $f(a) < 0 < f(b)$; α est son unique zéro. On part de $u_0 = b$.

a) Montrer que la tangente en $u_n > \alpha$ coupe l'axe en $u_{n+1} \in [\alpha, u_n[$ (la courbe est au-dessus de sa tangente).

b) En déduire que (u_n) est décroissante, minorée par α, et converge vers α.

c) Application : $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1,2]$. Calculer u_1, u_2, u_3.

d) Que se passe-t-il si l'on part de $u_0 = a$?

Exercice 5 – Méthode de la fausse position

Même cadre (f convexe, croissante, $f(a) < 0 < f(b)$). On garde b fixe et l'on pose $u_0 = a$, u_{n+1} = abscisse du point où la corde entre $(u_n, f(u_n))$ et $(b, f(b))$ coupe l'axe.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Montrer que $u_n < u_{n+1} \le \alpha$ (courbe sous ses cordes).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire la convergence vers α.

d) Application : $x^2 - 2$ sur $[1, 2]$; calculer $u_1, \ldots, u_4$ et comparer à Newton.

Exercice 6 – Intersections avec une droite

a) Montrer qu'une droite coupe la courbe d'une fonction strictement convexe en au plus deux points.

b) Résoudre $e^x = 2x + 1$: montrer qu'il y a exactement deux solutions, dont 0, et encadrer l'autre.

c) Discuter selon $a > 0$ le nombre de solutions de $\ln x = ax$.

d) Discuter le nombre de solutions de $e^x = x + b$ selon b.

Exercice 7 – Asymptote et convexité

Soit f convexe sur $[0, +\infty[$ admettant une asymptote oblique $y = ax + b$ en $+\infty$.

a) Montrer que $f(x) \geq ax + b$ pour tout $x \geq 0$ (sinon, considérer une corde au-dessous de l'asymptote).

b) Vérifier avec $\sqrt{1 + x^2}$ et l'asymptote $y = x$.

c) Montrer que $f(x) - (ax + b)$ est décroissante.

d) Application : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$; asymptote, position et monotonie de l'écart.

Exercice 8 – Encadrer ln par tangentes et cordes

a) Montrer que pour $x \in [1, 2]$: $(x - 1)\ln 2 \leq \ln x \leq x - 1$.

b) Améliorer la majoration avec la tangente en $\frac{3}{2}$: $\ln x \leq \ln \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

c) En utilisant la corde sur $[1, 2]$ et ces tangentes, encadrer $\ln 1{,}2$.

d) Montrer que pour $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

Exercice 9 – Accroissements d'une fonction convexe

Soit f convexe et dérivable sur I, et $x < y$ dans I.

a) Montrer que $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$.

b) En déduire que $n \mapsto f(n + 1) - f(n)$ est croissante.

c) Application à $f(x) = x \ln x$: montrer que
$\ln n + 1 \leq (n + 1)\ln(n + 1) - n \ln n \leq \ln(n + 1) + 1$.

d) En sommant, encadrer $\ln(n!)$ et vérifier pour $n = 10$ ($\ln 10! \approx 15{,}104$).

Exercice 10 – Portefeuille de variance minimale

On place une proportion $w \in [0, 1]$ dans un actif de volatilité $\sigma_1 = 20\,\%$ et $1 - w$ dans un actif de volatilité $\sigma_2 = 10\,\%$, supposés non corrélés. La variance vaut $V(w) = w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2$.

a) Montrer que V est strictement convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer w^* minimisant V et la volatilité minimale $\sqrt{V(w^*)}$.

c) Comparer au placement tout sur l'actif le moins risqué.

d) Donner w^* en général et interpréter.

Exercice 11 – Répartir une production

Une entreprise produit $Q = 30$ unités dans deux usines de coûts $C_1(q) = q^2$ et $C_2(q) = 2q^2$.

a) Exprimer le coût total $C(q_1) = C_1(q_1) + C_2(Q - q_1)$ et montrer qu'il est convexe.

b) Déterminer la répartition optimale et le coût minimal.

c) Montrer qu'à l'optimum les **coûts marginaux** sont égaux.

d) Généraliser : pour des coûts convexes dérivables, justifier que l'égalité des coûts marginaux caractérise l'optimum.

Exercice 12 – Convexe non affine ⇒ tend vers l'infini

Soit f convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, non affine.

a) Montrer qu'il existe $a < b$ avec $f'(a) < f'(b)$.

b) En utilisant les tangentes en a et en b, montrer que $f \to +\infty$ en $+\infty$ si $f'(b) > 0$, en $-\infty$ si $f'(a) < 0$.

c) En déduire que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

d) Exemples : e^x, x^2, $\ln(1 + e^x)$.

Exercice 13 – Convexité et polygones réguliers

Le périmètre du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité est $p_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}$.

a) Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $]0, \pi]$ (étudier $x \cos x - \sin x$).

b) En déduire que (p_n) est croissante et converge vers 2π.

c) Montrer que le périmètre du polygone circonscrit, $q_n = 2n \tan \frac{\pi}{n}$, décroît vers 2π.

d) Encadrer π avec $n = 6$ et $n = 12$.

Exercice 14 – Rendements décroissants

Une production dépend du travail L selon $P(L) = 10\sqrt{L}$ (heures, unités).

a) Montrer que P est concave et interpréter (« rendements décroissants »).

b) Montrer que $\frac{P(L)}{L}$ (productivité moyenne) est décroissante.

c) Deux ateliers disposent de $L_1 + L_2 = 100$ heures. Montrer que la production totale $P(L_1) + P(L_2)$ est maximale pour $L_1 = L_2$.

d) Calculer le gain par rapport à $L_1 = 80$, $L_2 = 20$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Fonctions convexes positivement homogènes

Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ avec $f(tx) = tf(x)$ pour $t \geq 0$.

a) Montrer que f est sous-additive : $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

b) Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -\beta x$ pour $x \leq 0$, avec $\alpha = f(1)$, $\beta = f(-1)$.

c) À quelle condition sur α, β une telle fonction est-elle convexe ?

d) Montrer que f est une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = \beta > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).