Plaquette 1 – Convexité, position par rapport aux tangentes et inégalités classiques

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On caractérise la convexité par le signe de f'', on exploite la position de la courbe par rapport à ses **tangentes** et à ses **cordes**, puis on en déduit des inégalités (Bernoulli, moyennes, concavité du logarithme).

Exercice 1 – Convexité par la dérivée seconde

Étudier la convexité de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les points d'inflexion.

Exercice 2 – Convexité de l'exponentielle

Montrer que exp est convexe sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que pour tout réel x : $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$.

Exercice 3 – Concavité du logarithme

Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x - 1$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Exercice 4 – Inégalité des cordes

Soit f convexe sur $[0\,;1]$. Comparer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\frac{f(0)+f(1)}{2}$.

Exercice 5 – Inégalité de Bernoulli

Soit $\alpha \geq 1$. Montrer que pour tout $x \geq -1$: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Exercice 6 – Moyenne arithmétique et géométrique

Soient $a, b > 0$. Démontrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ à l'aide de la concavité de ln.

Exercice 7 – Somme de fonctions convexes

a) La somme de deux fonctions convexes est-elle convexe ?
b) Le produit de deux fonctions convexes l'est-il ? Donner un contre-exemple.

Exercice 8 – Composition

Soient f convexe et g convexe **croissante**. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 9 – Point d'inflexion et tangente traversée

Soit $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer son point d'inflexion.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Inégalité de Jensen

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Exercice 11 – Convexité et pentes

Soit f convexe sur I et $a < b < c$ trois points de I. Comparer les trois pentes

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \qquad \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Exercice 12 – Synthèse : minimum d'une fonction convexe

Soit f convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(a) = 0$.

Montrer que a est un minimum **global** de f.

Exercice 13 – Convexe et majorée sur $\mathbb{R}$

Soit f convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, majorée par M.

a) Écrire l'inégalité de la tangente en un point a.

b) Si $f'(a) > 0$, que se passe-t-il quand $x \to +\infty$? Si $f'(a) < 0$, quand $x \to -\infty$?

c) En déduire que f est constante.

d) Le résultat subsiste-t-il sur $[0, +\infty[$? (tester $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$)

Exercice 14 – Inégalité de Young

Soient $p, q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $a, b > 0$.

a) Par la concavité de ln, montrer que $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q$.

b) En déduire l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, et le cas d'égalité.

c) Cas $p = q = 2$: quelle inégalité classique retrouve-t-on ?

d) Vérifier pour $p = 3$, $q = \frac{3}{2}$, $a = 2$, $b = 1$.

Exercice 15 – Sinus des angles d'un triangle

Soient A, B, C les angles d'un triangle ($A + B + C = \pi$).

a) Montrer que sin est concave sur $[0, \pi]$.

b) En déduire que $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, avec égalité pour le triangle équilatéral.

c) Montrer que $\ln \sin$ est concave sur $]0, \pi[$ et en déduire $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

d) Vérifier sur le triangle rectangle isocèle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).