Plaquette 2 – Inégalités de convexité

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour prouver une inégalité entre moyennes ou sommes, on cherche la **fonction convexe (ou concave) cachée** : ln pour les produits, x^p pour les puissances, $x\ln x$ pour l'entropie, $\frac{x}{S-x}$ pour les fractions. On applique alors l'**inégalité de Jensen** avec des poids bien choisis (souvent égaux), et le cas d'égalité découle de la **stricte** convexité : tous les points sont égaux. Penser aussi à passer au logarithme : une inégalité multiplicative devient additive.

Exercice 1 – Inégalité arithmético-géométrique

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$.

a) Appliquer Jensen à ln (concave) pour montrer l'IAG.

b) Préciser le cas d'égalité.

c) Montrer que parmi les pavés de somme des dimensions $a+b+c=S$ fixée, le cube a le plus grand volume.

d) Montrer que $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ et vérifier pour $n=10$.

Exercice 2 – Chaîne des moyennes

Pour $x_1, \dots, x_n > 0$ on note H, G, A, Q les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique.

a) Montrer $A \le Q$ par la convexité de $x \mapsto x^2$.

b) Montrer $H \le G$ en appliquant l'IAG aux $\frac{1}{x_i}$.

c) Calculer les quatre moyennes de 1 et 4.

d) Un cycliste fait l'aller à 60 km/h et le retour à 40 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne ? Laquelle des moyennes est-ce ?

Exercice 3 – Moyennes de puissances

Pour $x_1, \dots, x_n > 0$ et $p > 0$, on pose $M_p = \left(\frac{1}{n}\sum x_i^p\right)^{1/p}$.

a) Pour $0 < p < q$, montrer que $x \mapsto x^{q/p}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

b) En appliquant Jensen aux $y_i = x_i^p$, montrer que $M_p \le M_q$.

c) Calculer M_1, M_2, M_3 pour $(1, 2, 3)$.

d) Montrer que $M_p \to \max x_i$ quand $p \to +\infty$ (encadrer $\frac{1}{n}\max^p \le \frac{1}{n}\sum x_i^p \le \max^p$).

Exercice 4 – Inégalités de Hölder et Cauchy-Schwarz

Soient $a_i, b_i > 0$, $p, q > 1$ conjugués.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) On pose $A = \left(\sum a_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum b_i^q\right)^{1/q}$. Appliquer Young à $\frac{a_i}{A}$ et $\frac{b_i}{B}$ et sommer.

b) En déduire l'inégalité de Hölder.

c) Cas $p = q = 2$: Cauchy-Schwarz. Vérifier avec $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 5, 6)$.

d) Application : montrer que $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercice 5 – Inégalité de Nesbitt

Soient $a, b, c > 0$ et $S = a + b + c$.

a) Montrer que $f(x) = \frac{x}{S - x}$ est convexe sur $]0, S[$.

b) En déduire l'inégalité de Nesbitt : $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$.

c) Cas d'égalité ?

d) Vérifier pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

Exercice 6 – Entropie maximale

Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ une loi de probabilité ($p_i > 0$, $\sum p_i = 1$). Son entropie est $H = -\sum p_i \ln p_i$.

a) Montrer que $\varphi(x) = x \ln x$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

b) Appliquer Jensen à φ avec les poids $\frac{1}{n}$ et les points p_i ; en déduire $H \leq \ln n$.

c) Cas d'égalité ; interpréter.

d) Calculer l'entropie (en bits, avec $\log_2$) de $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et la comparer à $\log_2 3$.

Exercice 7 – Inégalité de Gibbs

Soient (p_i) et (q_i) deux lois de probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$, à termes > 0.

a) Montrer que $\sum p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \ln \sum p_i \frac{q_i}{p_i}$ (Jensen pour ln).

b) En déduire que $D(p \| q) = \sum p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $p = q$.

c) Retrouver le résultat de l'exercice précédent en prenant q uniforme.

d) Calculer $D(p \| q)$ pour $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $q = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Exercice 8 – Puissances d'une somme

Soient $a, b \geq 0$.

a) Pour $p \geq 1$, montrer $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

b) Pour $0 < p \leq 1$, montrer $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ (étudier $t \mapsto (1 + t)^p - 1 - t^p$ ou utiliser la concavité et $f(0) = 0$).

c) Pour $p \geq 1$, montrer $(a + b)^p \geq a^p + b^p$.

d) Vérifier les trois inégalités pour $a = 1$, $b = 3$, $p = 2$ puis $p = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Produit de facteurs 1 + a_i

Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ et $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

a) Montrer que $\psi(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) En appliquant Jensen à ψ aux points $x_i = \ln a_i$, montrer que $\prod (1 + a_i) \geq (1 + G)^n$.

c) Application : si $a_1 \cdots a_n = 1$, montrer que $\prod (1 + a_i) \geq 2^n$.

d) Vérifier pour $(a_1, a_2) = \left(4, \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 10 – Tangentes d'un triangle acutangle

Soit un triangle d'angles A, B, C tous aigus.

a) Montrer que tan est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

c) Montrer l'identité $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ (partir de $\tan(A + B) = -\tan C$).

d) En déduire $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ et vérifier pour $A = B = \frac{5\pi}{12}$, $C = \frac{\pi}{6}$.

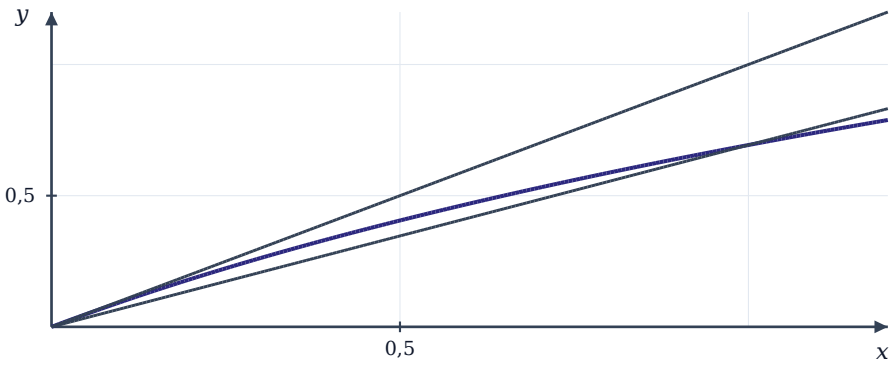
Exercice 11 – Cordes et tangentes de fonctions usuelles

a) Montrer que $2^x \leq 1 + x$ sur $[0, 1]$ et $2^x \geq 1 + x \ln 2$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $x \ln 2 \leq \ln(1 + x) \leq x$ sur $[0, 1]$.

c) En déduire un encadrement de $\ln 1{,}5$.

d) Montrer que $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (inégalité de Jordan) par un argument de corde.



ln(1 + x) (épaisse) entre sa corde et sa tangente

Exercice 12 – Maximiser un produit sous contrainte

a) Maximiser xyz sous $x + y + z = 12$, $x, y, z > 0$.

b) Maximiser xyz sous $x + 2y + 3z = 18$ (appliquer l'IAG à x, $2y$, $3z$).

c) Maximiser $x^2 y$ sous $x + y = 3$ (appliquer l'IAG à $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2}$, y).

d) Vérifier c) par une étude de fonction.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Croissance de $(1 + 1/n)^n$ par l'IAG

a) Appliquer l'IAG aux $n + 1$ nombres $1 + \frac{1}{n}$ (répété n fois) et 1.

b) En déduire que $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est croissante.

c) Appliquer l'IAG aux $n + 2$ nombres $1 - \frac{1}{n+1}$ ($n + 1$ fois) et 1 pour montrer que $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ est décroissante.

d) Conclure sur la convergence et encadrer e avec $n = 10$.

Exercice 14 – Variance et convexité

Soient $x_1, \dots, x_n$ réels, de moyenne $\overline{x}$.

a) Montrer par Jensen que $\overline{x}^2 \leq \frac{1}{n}\sum x_i^2$.

b) En déduire que la variance $V = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \overline{x}^2$ est positive, et nulle si et seulement si tous les x_i sont égaux.

c) Montrer que $n\sum x_i^2 \geq \left(\sum x_i\right)^2$.

d) Application : si $x + y + z = 1$, montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Exercice 15 – Inégalité de Jensen pondérée et placements

Un capital évolue pendant n années avec des taux $t_1, \dots, t_n$ ($t_i > -1$). On note $\overline{t} = \frac{1}{n}\sum t_i$ le taux moyen arithmétique et τ le taux annuel équivalent : $(1 + \tau)^n = \prod(1 + t_i)$.

a) Montrer que $\tau \leq \overline{t}$ (IAG).

b) Cas $+50\,\%$ puis $-50\,\%$: calculer $\overline{t}$, τ et le capital final pour 1000 €.

c) Montrer que $\tau \geq \frac{n}{\sum \frac{1}{1+t_i}} - 1$.

d) Pourquoi un placement « volatil » est-il pénalisé à taux moyen égal ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).