Plaquette 3 – Propriétés des fonctions convexes

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

L'outil central est l'**inégalité des trois pentes** : pour $x < y < z$, la pente de $[x, y]$ est inférieure à celle de $[x, z]$, elle-même inférieure à celle de $[y, z]$. On en tire tout le reste : dérivées à gauche et à droite, continuité sur un intervalle ouvert, position par rapport aux tangentes, minimum local = minimum global. Pour montrer qu'une fonction est convexe sans la dériver, on l'écrit comme **sup** de fonctions convexes (affines, par exemple) ou comme **composée** d'une convexe croissante et d'une convexe.

Exercice 1 – Démonstration des trois pentes

Soit f convexe sur I et $x < y < z$ dans I.

a) Écrire $y = tx + (1-t)z$ avec $t \in]0, 1[$ explicite.

b) En déduire $f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$.

c) Réarranger pour obtenir les deux inégalités des trois pentes.

d) Vérifier sur $f(x) = x^2$ avec $x = 0$, $y = 1$, $z = 3$.

Exercice 2 – Dérivées latérales d'une fonction convexe

Soit f convexe sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

a) Montrer que $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

b) En déduire que f admet en a une dérivée à gauche et une dérivée à droite, avec $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

c) Montrer que f'_d est croissante.

d) Exemple : $f(x) = |x| + x^2$ en 0 et $f(x) = \max(x, 2x)$: calculer les dérivées latérales.

Exercice 3 – Continuité d'une fonction convexe

a) Déduire de l'exercice précédent qu'une fonction convexe sur un intervalle **ouvert** est continue.

b) Montrer qu'elle est même lipschitzienne sur tout segment $[c, d] \subset I$ (encadrer les pentes à l'aide de points $c' < c$ et $d' > d$ de I).

c) Donner une fonction convexe sur $[0, 1]$ discontinue en 1.

d) Montrer qu'en un point où f est convexe et dérivable, f' est continue (théorème de Darboux + monotonie) : une fonction convexe dérivable est C^1.

Exercice 4 – Sup de fonctions convexes

a) Montrer que le sup d'une famille de fonctions convexes (s'il est fini) est convexe.

b) En déduire que $|x|$, $\max(x^2, 2x + 3)$ et $x \mapsto \max_{1 \leq i \leq n}(a_i x + b_i)$ sont convexes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $f(x) = \sup_{t \in [0,1]} (tx - t^2)$ est convexe et la calculer.

d) Le inf de deux fonctions convexes est-il convexe ?

Exercice 5 – Composition et convexité

a) Montrer que si f est convexe et g convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe (sans dérivées).

b) En déduire la convexité de e^{x^2}, de $e^{|x|}$ et de $(x^2+1)^3$.

c) Montrer par un contre-exemple que « g croissante » est nécessaire (prendre $g(u) = (u-1)^2$, $f(x) = x^2$).

d) Montrer que si $f \geq 0$ est convexe, f^2 est convexe. Est-ce vrai sans $f \geq 0$?

Exercice 6 – Minimum d'une fonction convexe

Soit f convexe sur un intervalle I.

a) Montrer qu'un minimum local est global (si $f(x) < f(a)$ pour un x, regarder les points $a + t(x-a)$, t petit).

b) Montrer que l'ensemble des points où f atteint son minimum est un intervalle.

c) Si f est strictement convexe, montrer qu'elle atteint son minimum en au plus un point.

d) Application : montrer que $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| + x^2$ atteint son minimum en un unique point.

Exercice 7 – Convexité par le point milieu

Soit f continue sur I telle que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous x, y.

a) Montrer par récurrence sur n que l'inégalité de convexité est vraie pour tous les $t = \frac{k}{2^n}$, $0 \leq k \leq 2^n$.

b) En déduire, par densité des dyadiques et continuité, que f est convexe.

c) Application : montrer que $-\ln$ est convexe en utilisant seulement $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

d) La continuité est-elle nécessaire ? (on admettra l'existence de fonctions additives non linéaires, qui vérifient l'égalité du point milieu)

Exercice 8 – Fonctions log-convexes

Une fonction $f > 0$ est log-convexe si $\ln f$ est convexe.

a) Montrer que log-convexe $\Rightarrow$ convexe.

b) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont log-convexes.

c) La réciproque de a) est-elle vraie ? (tester x^2 sur $\mathbb{R}_+^*$)

d) Montrer que le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Convexe avec limite finie

Soit f convexe sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$; en déduire que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

b) On suppose que f a une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est décroissante (sinon, une pente positive entraîne $f \to +\infty$).

c) Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, non constante, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

d) Exemples : e^{-x}, $\sqrt{1+x^2}$, $x \ln x$ — préciser la limite de $\frac{f(x)}{x}$.

Exercice 10 – Suites convexes

Une suite (u_n) est convexe si $u_{n+1} + u_{n-1} \geq 2u_n$ pour $n \geq 1$, soit $\Delta_n = u_{n+1} - u_n$ croissante.

a) Montrer que si (u_n) est convexe et bornée, alors $\Delta_n \leq 0$ pour tout n.

b) En déduire que (u_n) est décroissante et convergente, et que $\Delta_n \to 0$.

c) Montrer que $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sont convexes.

d) Montrer que si (u_n) est convexe, $\frac{u_n}{n}$ a une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Exercice 11 – Maximum d'une fonction convexe sur un segment

Soit f convexe sur $[a, b]$.

a) Montrer que $f(x) \leq \max(f(a), f(b))$ pour tout $x \in [a, b]$.

b) En déduire le maximum de $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ sur $[-1, 2]$ sans dériver.

c) Montrer que le maximum de $x^2 + px + q$ sur $[-1, 1]$ vaut $1 + |p| + q$.

d) Soit $g(x) = e^x + e^{-2x}$. Donner son maximum sur $[-1, 1]$.

Exercice 12 – Épigraphe et convexité

L'épigraphe de $f : I \to \mathbb{R}$ est $E = \{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}$.

a) Montrer que f est convexe si et seulement si E est une partie convexe du plan.

b) Interpréter le sup de fonctions convexes : épigraphe du sup = intersection des épigraphes.

c) Montrer qu'une fonction dont l'épigraphe est un demi-plan est affine.

d) Décrire l'épigraphe de $|x|$ et de x^2.

Exercice 13 – Inégalité f(x + h) + f(x − h) ≥ 2f(x)

a) Montrer que si f est convexe, $f(x+h) + f(x-h) \geq 2f(x)$.

b) Si f est deux fois dérivable, montrer que $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \to f''(x)$ (L'Hôpital deux fois ou Taylor).

c) En déduire que si f est convexe et deux fois dérivable, $f'' \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Calculer ce quotient pour $f = \sin$ en $x = 1$, $h = 0{,}01$, et comparer à $f'(1)$.

Exercice 14 – Distance à un intervalle

Soit $d(x) = \operatorname{dist}(x, [a, b]) = \inf_{y \in [a,b]} |x - y|$.

a) Expliciter $d(x)$.

b) Montrer que d est convexe (en l'écrivant comme un max de fonctions affines).

c) Montrer que d est 1-lipschitzienne.

d) Montrer plus généralement que $x \mapsto \operatorname{dist}(x, C)$ est convexe pour tout intervalle C, mais pas pour $C = \{0, 1\}$.

Exercice 15 – Convexité stricte sans f'' > 0

a) Montrer que $x \mapsto x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ bien que $f''(0) = 0$.

b) Montrer que si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial, f est strictement convexe.

c) Montrer que $x \mapsto x - \sin x$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, mais l'est sur $[0, \pi]$.

d) Montrer que $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est strictement convexe, et que $x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ l'est aussi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).