Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : convexité

Convexité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Ces problèmes montrent la convexité à l'œuvre en économie (impôt progressif, rendements), en physique (consommation d'énergie), en probabilités (Jensen pour l'espérance), en optimisation (minimiseurs uniques, méthode de Newton) et en géométrie (triangle d'aire maximale). La démarche : **repérer la fonction convexe** qui porte le problème, vérifier sa convexité (dérivée seconde, sup de fonctions affines, composition), puis appliquer le bon outil — Jensen, position par rapport aux tangentes, minimum unique. La **transformée de Legendre** unifie plusieurs inégalités du chapitre.

Exercice 1 – Transformée de Legendre

a) Calculer f^* pour $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

b) Calculer f^* pour $f(x) = \mathrm{e}^x$ (distinguer $p < 0$, $p = 0$, $p > 0$).

c) Pour $f(x) = \frac{|x|^a}{a}$ ($a > 1$), montrer que $f^*(p) = \frac{|p|^b}{b}$ avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

d) En déduire l'inégalité de Young à partir de Fenchel-Young.

Exercice 2 – Jensen pour l'espérance

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$.

a) Écrire Jensen avec les poids p_i : $f(E[X]) \leq E[f(X)]$ pour f convexe.

b) Pour un dé équilibré, vérifier $E[X]^2 \leq E[X^2]$ et $\mathrm{e}^{E[X]} \leq E[\mathrm{e}^X]$.

c) En déduire que $V(X) = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$.

d) Un joueur d'utilité concave $u = \ln$ préfère-t-il 100 € certains ou un pari 50 € / 150 € équiprobable ?

Exercice 3 – Rouler à vitesse constante

La puissance nécessaire pour vaincre la traînée croît comme $P(v) = kv^3$. Un trajet dure un temps fixé T ; on le parcourt pendant $\frac{T}{2}$ à v_1 et $\frac{T}{2}$ à v_2.

a) Exprimer l'énergie $E = \frac{T}{2}(P(v_1) + P(v_2))$ et la distance parcourue.

b) Montrer que, à distance égale, rouler à vitesse constante $\frac{v_1 + v_2}{2}$ consomme moins.

c) Calculer le surcoût de $(60, 100)$ km/h par rapport à 80 km/h constant.

d) Généraliser à n phases de même durée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Triangle d'aire maximale à périmètre fixé

Un triangle a pour côtés a, b, c et pour demi-périmètre s. Formule de Héron : $A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$.

a) Appliquer l'IAG à $s-a$, $s-b$, $s-c$.

b) En déduire $A \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$, avec égalité pour le triangle équilatéral.

c) Aire maximale pour un périmètre de 12 cm ?

d) Comparer avec l'aire du triangle $(3,4,5)$ de même périmètre.

Exercice 5 – Impôt progressif et quotient

Un barème simplifié taxe à 0 % jusqu'à 10 000 €, 11 % entre 10 000 et 28 000 €, 30 % au-delà. On note $T(R)$ l'impôt pour un revenu R.

a) Montrer que T est convexe (affine par morceaux à pentes croissantes, ou max de fonctions affines).

b) Calculer $T(50\,000)$, $T(10\,000)$ et $T(30\,000)$.

c) Un couple aux revenus 50 000 et 10 000 est imposé soit séparément, soit sur la moyenne (quotient conjugal : $2T\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)$). Comparer ; justifier par la convexité.

d) Un impôt proportionnel (taux unique) serait-il sensible à ce mode de calcul ?

Exercice 6 – Superadditivité

Soit f convexe sur $[0,+\infty[$ avec $f(0)=0$.

a) Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que $f(a)+f(b) \le f(a+b)$ pour $a, b \ge 0$ (écrire $f(a) \le \frac{a}{a+b} f(a+b)$).

c) Application : $(a+b)^p \ge a^p + b^p$ pour $p \ge 1$ et $\mathrm{e}^{a+b} - 1 \ge (\mathrm{e}^a - 1) + (\mathrm{e}^b - 1)$.

d) Que devient le résultat pour f concave avec $f(0)=0$? Application à $\sqrt{\cdot}$.

Exercice 7 – Le max adouci (log-sum-exp)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $L(x) = \ln \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{x_i}$.

a) Montrer que $\max x_i \le L(x) \le \max x_i + \ln n$.

b) Calculer $L(1,2,3)$ et comparer.

c) Pour $\beta > 0$, on pose $L_\beta(x) = \frac{1}{\beta} \ln \sum \mathrm{e}^{\beta x_i}$. Montrer que $L_\beta \to \max x_i$ quand $\beta \to +\infty$.

d) Montrer que $t \mapsto L(x+ty)$ est convexe pour $n=2$ (calculer la dérivée seconde de $\ln(\mathrm{e}^{a+tc} + \mathrm{e}^{b+td})$).

Exercice 8 – Moindres carrés et convexité

On ajuste une droite $y = ax$ passant par l'origine aux points $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,7)$.

a) Écrire $S(a) = \sum (y_i - a x_i)^2$ et montrer que S est strictement convexe.

b) Déterminer a^* et $S(a^*)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer en général que $a^* = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$.

d) Pourquoi la convexité garantit-elle que le point critique est le minimum global ?

Exercice 9 – Newton pour minimiser

On minimise $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.

a) Montrer que f est strictement convexe et que son minimum est atteint en $\ln 2$.

b) Appliquer la méthode de Newton à f' : montrer que $x_{n+1} = x_n - 1 + 2\mathrm{e}^{-x_n}$.

c) Partant de $x_0 = 0$, calculer $x_1, \dots, x_4$ et les erreurs.

d) Pourquoi Newton converge-t-il ici depuis tout point de départ ? (convexité de f')

Exercice 10 – Normes ℓ^p et moyennes

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées > 0, $\|x\|_p = \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}$.

a) Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_3$ et $\max x_i$ pour $x = (1, 2, 3)$.

b) Montrer que $p \mapsto \|x\|_p$ est décroissante (par homogénéité, supposer $\|x\|_q = 1$ et remarquer que $x_i \le 1$).

c) Comparer avec les moyennes $M_p = n^{-1/p}\|x\|_p$, croissantes : pourquoi les deux sens ?

d) En déduire $\|x\|_q \le \|x\|_p \le n^{1/p - 1/q}\|x\|_q$ pour $p \le q$.

Exercice 11 – Étaler augmente la somme convexe

Soit f convexe, et $x \le a \le b \le y$ avec $a + b = x + y$.

a) Écrire a et b comme barycentres de x et y avec des poids t et $1 - t$ échangés.

b) En déduire $f(a) + f(b) \le f(x) + f(y)$.

c) Application : parmi les couples (u, v) de somme 10, lequel minimise $u^2 + v^2$? $\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v$?

d) Application : montrer que sin étant concave sur $[0, \pi]$, dans un triangle la somme $\sin A + \sin B$ augmente quand on rapproche A et B à somme fixée.

Exercice 12 – Barycentre et moindres carrés dans le plan

Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan, de coordonnées (a_i, b_i). On cherche $M = (x, y)$ minimisant $F(M) = \sum MA_i^2$.

a) Montrer que $F(x, y) = \sum (x - a_i)^2 + \sum (y - b_i)^2$ se sépare en deux fonctions d'une variable, convexes.

b) En déduire que le minimum est atteint en l'isobarycentre G.

c) Montrer que $F(M) = F(G) + nMG^2$ (formule de Leibniz).

d) Application : $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (4, 0)$, $A_3 = (0, 6)$. Calculer G et $F(G)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Taux équivalents et Bernoulli

a) Montrer que $(1+t)^\alpha \geq 1+\alpha t$ pour $\alpha \geq 1$, $t > -1$, et l'inégalité inverse pour $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Un taux annuel de 12 % correspond-il à un taux mensuel de 1 % ? Calculer le taux mensuel équivalent.

c) Justifier par a) que le taux mensuel équivalent est toujours inférieur au douzième du taux annuel.

d) Un placement à 1 % par mois rapporte quel taux annuel ?

Exercice 14 – Une fonction convexe est le sup de ses tangentes

Soit f convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f(x) = \sup_{a \in \mathbb{R}} (f(a) + f'(a)(x-a))$.

b) Écrire cette formule pour $f = \exp$ et retrouver $e^x \geq 1+x$.

c) Pour $f(x) = x^2$, vérifier que $x^2 = \sup_a (2ax - a^2)$.

d) En déduire une nouvelle preuve de la convexité : un sup de fonctions affines est convexe. Pourquoi a-t-on donc une **caractérisation** ?

Exercice 15 – Inégalité de Hermite en discret

Soit f convexe sur $[a,b]$ et $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ $(0 \leq k \leq n)$.

a) Montrer que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_k)+f(x_{n-k})}{2}$ pour tout k (points symétriques).

b) En déduire $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)$.

c) Montrer que $f(x_k) \leq \dfrac{n-k}{n}f(a) + \dfrac{k}{n}f(b)$ et en déduire $\dfrac{1}{n+1}\sum f(x_k) \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

d) Vérifier pour $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ avec $n = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).