Plaquette 3 – Coefficients binomiaux : identités et propriétés

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Coefficients binomiaux.

— $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ = nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments ; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

— **Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$; **pion** : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

— **Binôme** : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (dans un anneau commutatif).

— **Vandermonde** :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

— **Crosse de hockey** : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

— **Multinomial** : nombre de mots de longueur n avec n_i lettres de type i : $\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}$.

— **Arithmétique** : si p est premier et $0 < k < p$, p divise $\binom{p}{k}$.

Correction de l'exercice 1 – La formule de Vandermonde

a) Un comité à k femmes et $p-k$ hommes se choisit de $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ façons (produit). Les cas $k = 0, \dots, p$ sont disjoints et recouvrent tous les comités (principe additif), dont le nombre total est $\binom{m+n}{p}$:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$$

— (avec la convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j > n$).

b) Le coefficient de X^p dans le produit $\left(\sum_i \binom{m}{i} X^i\right)\left(\sum_j \binom{n}{j} X^j\right)$ est $\sum_{i+j=p} \binom{m}{i}\binom{n}{j}$; dans $(1+X)^{m+n}$, c'est $\binom{m+n}{p}$.

c) $\binom{9}{3} = 84$. Contrôle terme à terme :
$1 \times 10 + 4 \times 10 + 6 \times 5 + 4 \times 1 = 10 + 40 + 30 + 4 = 84$.

Réponse. $\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$; c) 84.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Somme des carrés des coefficients binomiaux

a) Vandermonde avec $m = n = p$ et $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

b) Un chemin de $(0,0)$ à (n,n) est déterminé par les positions de ses n pas « droite » parmi $2n$: $\binom{2n}{n}$ chemins. Après n pas, il est sur l’anti-diagonale, en un point $(k, n-k)$. Il y a $\binom{n}{k}$ chemins de $(0,0)$ à $(k,n-k)$ et, par symétrie, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ de $(k,n-k)$ à (n,n). En sommant sur k : $\sum \binom{n}{k}^2$.

c) $1 + 16 + 36 + 16 + 1 = 70 = \binom{8}{4}$.

Réponse. $\sum \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$; 70 pour $n = 4$.

Correction de l’exercice 3 – La crosse de hockey

a) Si le plus grand élément est $k+1$ (avec $p \le k \le n$), les p autres éléments sont choisis dans $[\![1,k]\!]$: $\binom{k}{p}$ parties. Ces cas sont disjoints et couvrent tout :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

b) Pour $n = p$: $\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$. Si c’est vrai au rang n, alors $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$ (Pascal).

c) $k(k-1) = 2\binom{k}{2}$: $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = 2\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$. Puis $\sum k^2 = \sum k(k-1) + \sum k = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Réponse. $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$; $\sum k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$; $\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l’exercice 4 – Formule du pion et moments

a) $k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$. Combinatoirement : choisir un comité de k membres puis un président (k choix) revient à choisir le président (n choix) puis les $k-1$ autres membres parmi $n-1$.

b) $\sum_k k\binom{n}{k} = n\sum_k \binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$.

c) En appliquant deux fois la formule du pion : $k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. D’où

$$\sum_k k^2\binom{n}{k} = \sum_k k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_k k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

d) $n = 3$: $\sum k\binom{3}{k} = 3 + 6 + 3 = 12 = 3 \times 4$; $\sum k^2\binom{3}{k} = 3 + 12 + 9 = 24 = 3 \times 4 \times 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$; $\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$.

Correction de l’exercice 5 – Sommes binomiales par le binôme

a) Binôme avec $a = 2$, $b = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$

b) En dérivant $(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k$: $n(1+x)^{n-1} = \sum k\binom{n}{k} x^{k-1}$; en $x = -1$ ($n \geq 2$) : $\sum (-1)^{k-1} k\binom{n}{k} = 0$, donc la somme vaut 0.

c) $\int_0^1 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \sum_k \binom{n}{k} \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x = \sum_k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, et $\int_0^1 (1+x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

d) Un coloriage en trois couleurs : 3^n possibilités. On choisit d’abord l’ensemble des éléments non rouges (k éléments, $\binom{n}{k}$ choix), puis on colorie chacun en bleu ou blanc (2^k choix) : $\sum \binom{n}{k} 2^k$.

Réponse. a) 3^n ; b) 0 ; c) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Correction de l’exercice 6 – Coefficients multinomiaux

a) 11 lettres : M (1), I (4), S (4), P (2). En plaçant successivement les lettres de chaque type :

$$\binom{11}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = 11 \times 210 \times 15 \times 1 = 34\,650 = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$$

b) On choisit les n_1 positions des lettres du type 1 ($\binom{n}{n_1}$), puis n_2 positions parmi les $n - n_1$ restantes, etc. Le produit se simplifie en $\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}$ (télescopage des factorielles).

c) En développant $(a+b+c)^6$, un terme a^2b^3c provient du choix de a dans 2 facteurs, b dans 3, c dans 1 : $\frac{6!}{2!\,3!\,1!} = 60$.

d) C’est $(1+1+1)^n$ développé par la formule multinomiale ; ou, combinatoirement, le nombre de mots de longueur n sur un alphabet à 3 lettres, classés selon le nombre de chaque lettre.

Réponse. 34 650 anagrammes ; coefficient 60 ; $\sum \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n$.

Correction de l’exercice 7 – Monotonie et maximum des coefficients binomiaux

a) $\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$.

b) Le quotient est $> 1 \Leftrightarrow n - k > k + 1 \Leftrightarrow k < \frac{n-1}{2}$. La suite croît tant que $k < \frac{n-1}{2}$, puis décroît (égalité de deux termes consécutifs au milieu si n est impair). Maximum en $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (et aussi en $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$).

c) Les $2n+1$ coefficients $\binom{2n}{k}$ ont pour somme $2^{2n} = 4^n$; le plus grand est $\binom{2n}{n}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\binom{2n}{n} \le 4^n \qquad \text{et} \qquad 4^n \le (2n+1)\binom{2n}{n}$$

d) $\binom{10}{5} = 252$, $4^5 = 1\,024$, $\frac{1\,024}{11} \approx 93$: $93 \le 252 \le 1\,024$. (Le bon ordre de grandeur, donné par Stirling, est $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \approx 258$.)

Réponse. Quotient $\frac{n-k}{k+1}$; maximum au milieu ; $\frac{4^n}{2n+1} \le \binom{2n}{n} \le 4^n$; $93 \le 252 \le 1024$.

Correction de l'exercice 8 – Divisibilité par un nombre premier

a) p divise $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. Comme $0 < k < p$ et p est premier, p ne divise pas k, donc p est premier avec k. Par le **lemme de Gauss**, p divise $\binom{p}{k}$.

b) Par le binôme, $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k b^{p-k}$, et chaque terme de la somme est multiple de p :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

c) $0^p = 0$. Si $a^p \equiv a$, alors $(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \equiv a + 1 \pmod{p}$ par b).

d) Pour $n = 4$ (non premier), $2\binom{4}{2} = 4\binom{3}{1}$: 4 divise 2×6, mais 4 n'est pas premier avec 2 ; le lemme de Gauss ne s'applique pas. Et 6 n'est pas multiple de 4.

Réponse. $p \mid \binom{p}{k}$ (Gauss) ; $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$; Fermat par récurrence ; $4 \nmid \binom{4}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Nombres de Catalan par réflexion

a) Après le premier point de contact T avec $y = x + 1$, on échange les pas droite et haut : le point d'arrivée (n, n) est remplacé par son symétrique par rapport à la droite, $(n-1, n+1)$. Réciproquement, tout chemin vers $(n-1, n+1)$ traverse la droite $y = x + 1$ (il part en dessous et arrive au-dessus) ; en réfléchissant après le premier contact, on retrouve un mauvais chemin. Les deux opérations sont réciproques.

b) Chemins de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$: $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1}$. Donc

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

— (car $\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n}\frac{n}{n+1}$).

c) $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{6}{3} = 2$, $C_3 = \frac{20}{4} = 5$, $C_4 = \frac{70}{5} = 14$. Pour $n = 3$, avec D (droite) et H (haut), les bons chemins sont : DDDHHH, DDHDHH, DDHHDH, DHDDHH, DHDHDH, soit 5.

Réponse. $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$; $1, 2, 5, 14$.

Correction de l'exercice 10 – Comité et sous-comité

a) Les deux membres comptent les couples (comité K, bureau B) avec $B \subset K$, $\mathrm{card} K = k$, $\mathrm{card} B = m$: soit on choisit K puis B dans K ; soit on choisit B ($\binom{n}{m}$) puis les $k - m$ autres membres de K parmi les $n - m$ personnes hors du bureau.

b) En sommant sur k :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{k-m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$$

c) Chaque personne est soit au bureau, soit simple membre, soit non-membre : on choisit le bureau ($\binom{n}{m}$), puis chacune des $n-m$ autres personnes est membre ou non (2^{n-m}). En sommant selon la taille k du comité, on obtient le membre de gauche.

d) $n=4$, $m=2$: $\binom{4}{2}\binom{2}{2}+\binom{4}{3}\binom{3}{2}+\binom{4}{4}\binom{4}{2}=6+12+6=24=\binom{4}{2}\times 2^2$.

Réponse. $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$; $\sum_k\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$; 24.

Correction de l’exercice 11 – Parité des coefficients binomiaux

a) $(1+X)^2=1+2X+X^2$ et $2=0$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par récurrence :

$$(1+X)^{2^{m+1}}=\left((1+X)^{2^m}\right)^2=\left(1+X^{2^m}\right)^2=1+X^{2^{m+1}}$$

b) Le coefficient de X^k dans $(1+X)^{2^m}$ est $\binom{2^m}{k}$ réduit modulo 2 ; il est nul pour $0<k<2^m$: ces coefficients sont pairs.

c) Ligne 8 : $1,8,28,56,70,56,28,8,1$; tous pairs sauf les extrêmes.

d) Dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, on cherche $Q=(1+X)^{2^m-1}$ tel que $(1+X)Q=1+X^{2^m}$; or $1+X^{2^m}=(1+X)(1+X+\ldots+X^{2^m-1})$ (car $-1=1$). Par intégrité, $Q=1+X+\ldots+X^{2^m-1}$: **tous** les $\binom{2^m-1}{k}$ sont **impairs**. Exemple : ligne 7 : $1,7,21,35,35,21,7,1$.

Réponse. $(1+X)^{2^m}=1+X^{2^m}$ modulo 2 ; $\binom{2^m}{k}$ pair pour $0<k<2^m$; $\binom{2^m-1}{k}$ toujours impair.

Correction de l’exercice 12 – Somme des coefficients de rang multiple de 3

a) Si $3\mid k$, $j^k=1$ et la somme vaut 3. Sinon, j^k est une racine cubique de l’unité différente de 1, et $1+j^k+j^{2k}=\dfrac{1-j^{3k}}{1-j^k}=0$.

b) En sommant les développements du binôme :

$$(1+1)^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n=\sum_k\binom{n}{k}\left(1+j^k+j^{2k}\right)=3S_n$$

c) $1+j=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{i\pi/3}$, et $1+j^2=\overline{1+j}=\mathrm{e}^{-i\pi/3}$. Donc $(1+j)^n+(1+j^2)^n=2\cos\frac{n\pi}{3}$ et — $S_n=\dfrac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$.

d) $n=6$: $\binom{6}{0}+\binom{6}{3}+\binom{6}{6}=1+20+1=22$ et $\dfrac{64+2\cos 2\pi}{3}=\dfrac{66}{3}=22$.

Réponse. $S_n=\dfrac{2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$; $S_6=22$.

Correction de l’exercice 13 – Sommes alternées partielles

a) Posons $u_k=(-1)^k\binom{n-1}{k}$ (avec $u_{-1}=0$). Par Pascal, $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(-1)^k\binom{n}{k} = -u_{k-1} + u_k$$

— En sommant de $k = 0$ à m, la somme **télescope** :
$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = u_m - u_{-1} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$.

b) $n = 5$: $m = 0$: $1 = \binom{4}{0}$; $m = 1$: $1 - 5 = -4 = -\binom{4}{1}$; $m = 2$: $-4 + 10 = 6 = \binom{4}{2}$; $m = 3$: $6 - 10 = -4 = -\binom{4}{3}$.

c) Pour $m = n$: $(-1)^n\binom{n-1}{n} = 0$ ($n \geq 1$), et l'on retrouve $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$.

Réponse. $\sum_{k \leq m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$; valeurs $1, -4, 6, -4$ pour $n = 5$.

Correction de l'exercice 14 – Symétrie et chemins : deux identités en une

a) Un chemin comporte $a + b$ pas dont a vers la droite ; il est déterminé par les positions de ces a pas :

$$\binom{a+b}{a}$$

b) Le dernier pas arrive en (a, b) depuis $(a-1, b)$ (pas droite) ou $(a, b-1)$ (pas haut). Donc $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b-1}{a-1} + \binom{a+b-1}{a}$: c'est Pascal avec $n = a + b - 1$.

c) Un chemin passant par (k, k) se décompose en un chemin de $(0, 0)$ à (k, k) ($\binom{2k}{k}$) et un de (k, k) à (n, n) ($\binom{2n-2k}{n-k}$) : produit.

d) $k = 0$: 1×6 ; $k = 1$: 2×2 ; $k = 2$: 6×1. Somme $6 + 4 + 6 = 16 = 4^2$. (Attention : ce n'est pas le nombre de chemins de $(0, 0)$ à $(2, 2)$, qui vaut 6, car un chemin passe en général par plusieurs points de la diagonale et serait compté plusieurs fois ; l'identité $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$ se démontre par les séries génératrices.)

Réponse. $\binom{a+b}{a}$ chemins ; Pascal par le dernier pas ; $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$; $6 + 4 + 6 = 16$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : inversion de Pascal et dérangements

a) On remplace b_j :

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}b_j = \sum_k a_k \sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{j}{k}$$

— Par la formule « comité et sous-comité », $\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}$, et la somme intérieure vaut $\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{n-k-i}\binom{n-k}{i} = \binom{n}{k}(1-1)^{n-k}$, soit δ_{nk}. Il reste a_n.

b) Une permutation dont l'ensemble des points fixes est F ($\mathrm{card} F = n - k$) est un dérangement des k autres éléments. Il y a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ choix de F, puis D_k dérangements : $n! = \sum_k \binom{n}{k} D_k$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Par a) avec $b_n = n!$ et $a_k = D_k$: $D_n = \sum_k (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = \sum_k (-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}$, soit, avec $j = n-k$, $D_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$.

— $D_4 = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 12 - 4 + 1 = 9$.

d) Permutations de $\{1,2,3\}$ sans point fixe : $(2,3,1)$ et $(3,1,2)$ (les deux cycles de longueur 3) : $D_3 = 2$, et $6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2$. (Quand $n \to +\infty$, $\frac{D_n}{n!} \to \mathrm{e}^{-1}$.)

Réponse. Inversion de Pascal ; $n! = \sum\binom{n}{k}D_k$; $D_n = n!\sum_{j\le n}\frac{(-1)^j}{j!}$; $D_4 = 9$, $D_3 = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).