Plaquette 5 – Dénombrement en situation : jeux, réseaux, codes

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choisir le bon modèle.

Tirage de p objets parmi n	ordonné	non ordonné
sans remise	$\frac{n!}{(n-p)!}$ (arrangements)	$\binom{n}{p}$ (combinaisons)
avec remise	n^p (listes)	$\binom{n+p-1}{p}$

— **Complémentaire** : « au moins un » → total moins « aucun ».

— **Partitions en groupes** de même taille non numérotés : on divise par le nombre d'ordres des groupes, par exemple

$$\frac{12!}{(4!)^3 \times 3!}$$

pour 3 équipes de 4.

— **Obstacle dans un quadrillage** : chemins évitant P = total − (chemins jusqu'à P) × (chemins depuis P).

— **Graphes** : sur n sommets étiquetés, $\binom{n}{2}$ arêtes possibles, donc $2^{\binom{n}{2}}$ graphes simples.

— **Probabilité uniforme** : $P(A) = \frac{\mathrm{card} A}{\mathrm{card}\Omega}$.

Correction de l'exercice 1 – Le loto

a) Une grille est une partie à 6 éléments de $[\![1, 49]\!]$:

$$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

b) On choisit k numéros parmi les 6 gagnants et $6-k$ parmi les 43 perdants : $\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$. Pour $k=3$: $\binom{6}{3}\binom{43}{3} = 20 \times 12\,341 = 246\,820$.

c) Les grilles sont classées selon leur nombre k de bons numéros (cas disjoints) : c'est la formule de **Vandermonde**.

d) Grilles à au moins 3 bons numéros : $246\,820 + 13\,545 + 258 + 1 = 260\,624$, soit une probabilité $\frac{260\,624}{13\,983\,816} \approx 0{,}0186$, environ 1 chance sur 54.

Réponse. $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$; $\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}$, 246 820 pour $k=3$; au moins 3 : ≈ 1,86 %.

Correction de l'exercice 2 – Le paradoxe des anniversaires

a) Listes de n dates : 365^n. À dates distinctes : arrangements $365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1) = \frac{365!}{(365-n)!}$.

b) Par le complémentaire :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$p_n = 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

c) $p_{23} \approx 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$: avec seulement 23 personnes, il est plus probable que non que deux partagent leur anniversaire. Le « paradoxe » vient de ce qu'on compare toutes les paires ($\binom{23}{2} = 253$), et non une date fixée.

d) $\ln(1 - x) \approx -x$ pour x petit, donc $\ln(1 - p_n) \approx -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{365} = -\frac{n(n-1)}{730}$. Pour $n = 23$: $\exp\left(-\frac{506}{730}\right) \approx 0{,}500$, proche de 0,4927.

Réponse. $p_n = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n}$; $p_{23} \approx 0{,}507$; approximation $e^{-n(n-1)/730} \approx 0{,}500$.

Correction de l'exercice 3 – Chemins avec un carrefour interdit

a) 10 pas dont 5 vers l'est : $\binom{10}{5} = 252$.

b) Trajets passant par $(2, 2)$: $\binom{4}{2}$ jusqu'à $(2, 2)$ puis $\binom{6}{3}$ jusqu'à $(5, 5)$, soit $6 \times 20 = 120$. Trajets évitant $(2, 2)$:

$$252 - 120 = 132$$

c) Passant par $(3, 3)$: $\binom{6}{3}\binom{4}{2} = 20 \times 6 = 120$. Passant par les deux : $\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 6 \times 2 \times 6 = 72$. Par le crible, trajets passant par au moins un : $120 + 120 - 72 = 168$, et évitant les deux : $252 - 168 = 84$.

Réponse. 252 ; 132 ; 84.

Correction de l'exercice 4 – Tournois

a) Un match correspond à une paire d'équipes : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

b) Chaque match a 2 issues : $2^{\binom{n}{2}}$ résultats (pour $n = 4$: $2^6 = 64$).

c) Un classement est une permutation des équipes : $n!$.

d) Chaque match donne exactement une victoire : la somme des nombres de victoires est $\binom{4}{2} = 6$. Si les 4 équipes avaient le même nombre v de victoires, $4v = 6$: impossible. En général, un tournoi « équilibré » (chaque équipe gagne autant de matchs) exige que n divise $\binom{n}{2}$, c'est-à-dire que n soit impair.

Réponse. $\binom{n}{2}$ matchs ; $2^{\binom{n}{2}}$ résultats ; $n!$ classements ; somme des victoires 6 pour $n = 4$, pas d'égalité possible.

Correction de l'exercice 5 – Graphes à 4 sommets

a) Un graphe est une partie de l'ensemble des $\binom{4}{2} = 6$ paires :

$$2^6 = 64$$

b) $\binom{6}{3} = 20$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Triangles : choisir les 3 sommets, $\binom{4}{3} = 4$. Étoiles : choisir le centre, 4. Chemins $a - b - c - d$: $\frac{4!}{2} = 12$ (un chemin et son renversé sont le même graphe). Total $4 + 4 + 12 = 20$: il n'y a pas d'autre forme à 3 arêtes sur 4 sommets (un graphe à 3 arêtes sans cycle est un arbre couvrant : étoile ou chemin ; avec un cycle, c'est un triangle).

d) Ce sont exactement les triangles de c) : le quatrième sommet est isolé. 4 graphes.

Réponse. 64 graphes ; 20 à 3 arêtes : 4 triangles, 4 étoiles, 12 chemins.

Correction de l'exercice 6 – Mains au jeu de 32 cartes

a) $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$.

b) Exactement 2 as : $\binom{4}{2}\binom{28}{6} = 6 \times 376\,740 = 2\,260\,440$. Au moins un as, par le complémentaire :

$$\binom{32}{8} - \binom{28}{8} = 10\,518\,300 - 3\,108\,105 = 7\,410\,195$$

c) Soit A_c l'ensemble des mains sans la couleur c : $|A_c| = \binom{24}{8}$, deux couleurs absentes : $\binom{16}{8}$, trois : $\binom{8}{8} = 1$. Par le crible :

— $|\bigcup A_c| = 4\binom{24}{8} - 6\binom{16}{8} + 4\binom{8}{8} = 4 \times 735\,471 - 6 \times 12\,870 + 4 = 2\,941\,884 - 77\,220 + 4 = 2\,864\,668$.

— Mains avec les quatre couleurs : $10\,518\,300 - 2\,864\,668 = 7\,653\,632$.

Réponse. 10 518 300 ; 2 260 440 avec 2 as, 7 410 195 avec au moins un ; 7 653 632 avec les 4 couleurs.

Correction de l'exercice 7 – Codes à quatre chiffres

a) $10^4 = 10\,000$ listes.

b) Chiffres distincts : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$. Au moins deux égaux : $10\,000 - 5\,040 = 4\,960$.

c) Strictement croissant : un tel code est déterminé par l'ensemble de ses chiffres, $\binom{10}{4} = 210$. Croissant au sens large : combinaisons avec répétition, $\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$.

d) Les 4 chiffres $1, 3, 5, 7$ apparaissent chacun exactement une fois (4 positions, 4 chiffres tous présents) : ce sont les permutations, $4! = 24$ codes.

Réponse. 10 000 ; 5 040 distincts, 4 960 avec répétition ; 210 et 715 ; 24 essais.

Correction de l'exercice 8 – Former des équipes

a) On choisit l'équipe 1, puis la 2, la 3 est imposée :

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4} = 495 \times 70 = 34\,650 = \frac{12!}{4!\,4!\,4!}$$

b) Chaque répartition non numérotée correspond à $3! = 6$ répartitions numérotées : $\frac{34\,650}{6} = 5\,775$.

c) L'équipe de A et B est complétée par 2 joueurs parmi 10 ($\binom{10}{2} = 45$), puis les 8

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

restants forment 2 équipes non numérotées ($\frac{\binom{8}{4}}{2} = 35$) : $45 \times 35 = 1\,575$.

d) $\frac{1\,575}{5\,775} = \frac{3}{11}$. Directement : les 3 coéquipiers de A sont choisis parmi les 11 autres, et B est l'un d'eux avec probabilité $\frac{3}{11}$.

Réponse. 34 650 numérotées ; 5 775 non numérotées ; 1 575 avec A et B ensemble ; probabilité $\frac{3}{11}$.

Correction de l'exercice 9 – Triangles inscrits dans un octogone

a) $\binom{8}{3} = 56$.

b) Deux côtés communs : les trois sommets sont consécutifs ; un tel triangle est déterminé par son sommet du milieu : 8 triangles.

— Exactement un côté commun : on choisit ce côté (8 choix), puis le troisième sommet parmi les sommets non adjacents à ce côté : $8 - 2 - 2 = 4$ choix. Soit $8 \times 4 = 32$.

c) Aucun côté commun :

$$56 - 8 - 32 = 16$$

— et $\frac{8 \times 4 \times 3}{6} = 16$.

Réponse. 56 triangles ; 8 à deux côtés communs, 32 à un seul ; 16 sans côté commun.

Correction de l'exercice 10 – Compter par programme

a) Énumération directe :

```
def compte():
    n = 0
    for a in range(1, 21):
        for b in range(a + 1, 21):
            for c in range(b + 1, 21):
                if a + b + c == 30:
                    n = n + 1
    return n
```

b) c est déterminé par a et b : il suffit de vérifier $b < c \leq 20$, ce qui divise le coût par 20 environ :

```
def compte2():
    n = 0
    for a in range(1, 21):
        for b in range(a + 1, 21):
            c = 30 - a - b
            if b < c <= 20:
                n = n + 1
    return n
```

c) Pour a fixé, b doit vérifier $b > a$, $b < c = 30 - a - b$ (soit $b < \frac{30 - a}{2}$) et $30 - a - b \leq 20$ (soit $b \geq 10 - a$).

— $a = 1$: $9 \leq b \leq 14$, 6 valeurs ; $a = 2$: $8 \leq b \leq 13$, 6 ; $a = 3$: $7 \leq b \leq 13$, 7 ; $a = 4$: $6 \leq b \leq 12$, 7 ; $a = 5$: $6 \leq b \leq 12$, 7 ; $a = 6$: $7 \leq b \leq 11$, 5 ; $a = 7$: $8 \leq b \leq 11$, 4 ; $a = 8$: $9 \leq b \leq 10$, 2 ; $a = 9$: $b = 10$, 1.

— Total : $6 + 6 + 7 + 7 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 45$.

Réponse. 45 parties.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Étoiles et barres avec plafond

a) $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dans $\mathbb{N}$: $\binom{12}{2} = 66$.

b) Dans A_1, on pose $y_1 = x_1 - 5 \geq 0$: $y_1 + x_2 + x_3 = 5$, soit $\binom{7}{2} = 21$. Dans $A_1 \cap A_2$: $y_1 + y_2 + x_3 = 0$, soit 1. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ ($15 > 10$).

c) Par le crible :

$$66 - 3 \times 21 + 3 \times 1 - 0 = 6$$

— Énumération : les triplets de somme 10 à coordonnées ≤ 4 sont les permutations de $(4, 4, 2)$ (3) et de $(4, 3, 3)$ (3) : 6.

Réponse. 66 sans plafond ; $|A_i| = 21$, $|A_i \cap A_j| = 1$; 6 répartitions.

Correction de l’exercice 12 – Amis ou inconnus : le nombre de Ramsey R(3, 3)

a) Principe des tiroirs : les 5 autres personnes sont réparties en deux « tiroirs » (amis de A, inconnus de A) ; l’un contient au moins $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ personnes.

b) Supposons que A a 3 amis B, C, D (l’autre cas est symétrique). Si deux d’entre eux sont amis, disons B et C, alors A, B, C sont deux à deux amis. Sinon, B, C, D sont deux à deux inconnus. Dans tous les cas, la conclusion est vraie.

c) Pentagone $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$: chacun est ami de ses deux voisins et inconnu des deux autres. Trois personnes parmi cinq contiennent toujours deux non voisins (pas de trio d’amis, car le pentagone n’a pas de triangle) et deux voisins (pas de trio d’inconnus, car les « non-voisinages » forment aussi un pentagone, $1 - 3 - 5 - 2 - 4 - 1$). Donc 6 est le plus petit nombre qui force la propriété : $R(3, 3) = 6$.

Réponse. Tiroirs : 3 amis ou 3 inconnus ; trio garanti avec 6 personnes ; contre-exemple du pentagone : $R(3, 3) = 6$.

Correction de l’exercice 13 – Boules de Hamming et codes correcteurs

a) Distance 0 : le mot lui-même ; distance 1 : on change une des 7 positions. Soit $1 + 7 = 8$ mots à distance ≤ 1. Distance exactement 2 : $\binom{7}{2} = 21$.

b) Les boules sont disjointes et contenues dans l’ensemble des $2^7 = 128$ mots, chacune de cardinal 8. Si le code a M mots :

$$8M \leq 128, \qquad M \leq 16$$

c) $16 \times 8 = 128$: les boules **recouvrent exactement** l’espace. Tout mot reçu est à distance ≤ 1 d’un unique mot du code : c’est un code **parfait**.

d) $M \times (1 + n) \leq 2^n$, soit $M \leq \frac{2^n}{n+1}$. Un code parfait corrigeant une erreur exige que $n + 1$ divise 2^n, donc que $n + 1$ soit une puissance de 2 ($n = 3, 7, 15, \ldots$).

Réponse. 8 mots à distance ≤ 1, 21 à distance 2 ; $M \leq 16$; Hamming : code parfait ; $M \leq \frac{2^n}{n+1}$.

Correction de l’exercice 14 – Plaques d’immatriculation

a) Principe multiplicatif (listes) :

$$23^4 \times 999 = 279\,841 \times 999 = 279\,561\,159$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\dfrac{279\,561\,159}{2\times 10^{6}} \approx 140$ ans.

c) Lettres identiques : 23 choix pour la lettre, puis les chiffres : $23\times 999 = 22\,977$. Bloc palindrome $\overline{aba}$: a de 0 à 9, b de 0 à 9, en excluant 000 : $100-1=99$ blocs, d'où $23^{4}\times 99 = 27\,704\,259$ plaques.

Réponse. $23^{4}\times 999 = 279\,561\,159$; environ 140 ans ; 22 977 et 27 704 259.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le problème des rencontres

a) Une répartition est une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ (la lettre i va dans l'enveloppe $\sigma(i)$) : $\mathrm{card}\,\Omega = n!$.

b) « Aucune lettre bien placée » = σ sans point fixe :

$$p_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

c) $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{9}{24} = 0{,}375$, $p_5 = \frac{44}{120} \approx 0{,}367$. La série converge vers $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}3679$: la probabilité ne dépend presque plus de n dès $n=5$.

d) Exactement une lettre bien placée : on choisit laquelle (5), puis les 4 autres sont dérangées ($D_4 = 9$) : $\frac{45}{120} = 0{,}375$.

Réponse. $\Omega = S_n$; $p_n = \frac{D_n}{n!} \to \mathrm{e}^{-1}$; $p_5 = \frac{44}{120}$; exactement une : $\frac{45}{120}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).