Plaquette 2 – Principes de dénombrement : bijections, produit, tiroirs

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Principes.

— **Bijection** : $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$ s'il existe une bijection $E \to F$.

— **Additif** : $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cap B)$; **complémentaire** : $\mathrm{card}\overline{A} = \mathrm{card}E - \mathrm{card}A$.

— **Produit** : $\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}E \times \mathrm{card}F$.

— **Applications** de E (p éléments) dans F (n éléments) : n^p ; injections : $\frac{n!}{(n-p)!}$; parties de F : 2^n ; parties à k éléments : $\binom{n}{k}$.

— **Crible** (trois ensembles) :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

— **Étoiles et barres** : le nombre de solutions de $x_1 + \ldots + x_k = n$ dans $\mathbb{N}$ est $\binom{n+k-1}{k-1}$.

— **Tiroirs** : si $n+1$ objets sont rangés dans n tiroirs, un tiroir en contient au moins deux.

— **Lemme des poignées de main** : dans un graphe, $\sum_v \deg v = 2 \times$ (nombre d'arêtes).

Correction de l'exercice 1 – Compter les diviseurs

a) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Tout diviseur s'écrit de façon unique $2^a 3^b 5^c$ avec $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 2$, $0 \leq c \leq 1$: l'application $(a,b,c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une bijection de $[\![0,4]\!] \times [\![0,2]\!] \times [\![0,1]\!]$ sur l'ensemble des diviseurs. Par le principe produit :

$$d(720) = (4+1)(2+1)(1+1) = 30$$

b) Pairs : $a \geq 1$, soit $4 \times 3 \times 2 = 24$. Carrés : a, b, c pairs, soit $a \in \{0,2,4\}$, $b \in \{0,2\}$, $c = 0$: $3 \times 2 = 6$ carrés $(1, 4, 9, 16, 36, 144)$.

c) L'application $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une involution de l'ensemble des diviseurs ; elle les groupe par paires $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$, sauf les points fixes $d = \frac{n}{d}$, c'est-à-dire $d = \sqrt{n}$. Le nombre de diviseurs est impair si et seulement s'il y a un point fixe, c'est-à-dire si n est un carré. Contrôle : $d(720) = 30$ est pair, et 720 n'est pas un carré.

Réponse. $d(720) = 30$; 24 pairs, 6 carrés ; nombre impair de diviseurs $\Leftrightarrow$ carré.

Correction de l'exercice 2 – Applications et injections

a) Une application est une liste $(f(x_1), f(x_2), f(x_3))$ d'éléments de F : $5^3 = 125$. Une injection est une telle liste à éléments distincts : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

b) Chaque élève reçoit une salle : 125 attributions ; celles où les trois élèves sont dans des salles différentes sont les injections, au nombre de 60.

c) $3^5 = 243$ applications de F dans E. Aucune injection : 5 éléments ne peuvent avoir des

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

images distinctes dans un ensemble à 3 éléments (principe des tiroirs).

d) On choisit $f(x_1)$ (n choix), puis $f(x_2) \neq f(x_1)$ ($n-1$ choix), …, $f(x_p)$ ($n-p+1$ choix) :

$$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

— (valable si $p \leq n$; sinon, il n'y a aucune injection).

Réponse. 125 applications, 60 injections ; 243 applications de F dans E, aucune injection.

Correction de l'exercice 3 – Parties et mots binaires

a) À une partie A, on associe son **indicatrice** $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = 1$ si $i \in A$, 0 sinon. L'application réciproque associe à un mot binaire l'ensemble des positions de ses 1. Donc

$$\mathrm{card}\,\mathcal{P}(E) = \mathrm{card}\,\{0,1\}^n = 2^n$$

b) $\overline{A}$ a $n-k$ éléments si A en a k, et $\overline{\overline{A}} = A$: l'application est sa propre réciproque, donc bijective. Les deux ensembles ont même cardinal : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

c) $\mathcal{P}(E)$ est la réunion **disjointe** des ensembles de parties à k éléments, pour $k = 0, \ldots, n$. Principe additif : $\sum_k \binom{n}{k} = \mathrm{card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Réponse. Indicatrice : 2^n parties ; complémentaire : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\sum \binom{n}{k} = 2^n$.

Correction de l'exercice 4 – Autant de parties paires que de parties impaires

a) $\varphi(\varphi(A)) = A$: φ est une involution, donc bijective. Elle ajoute ou retire exactement un élément : $\mathrm{card}\,\varphi(A) = \mathrm{card}\,A \pm 1$, de parité opposée.

b) φ envoie les parties paires sur les parties impaires, bijectivement : les deux ensembles ont même cardinal N. Comme ils partitionnent $\mathcal{P}(E)$: $2N = 2^n$, donc $N = 2^{n-1}$.

c) Le nombre de parties paires est $\sum_k \binom{n}{2k}$, d'où la première égalité. La différence (paires − impaires) est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 2^{n-1} - 2^{n-1} = 0$$

— (c'est aussi $(1-1)^n$ par le binôme).

d) $n = 4$: $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8 = 2^3$ et $\binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8$.

Réponse. Bijection $A \mapsto A \Delta \{1\}$; 2^{n-1} parties paires et 2^{n-1} impaires.

Correction de l'exercice 5 – Nombres à chiffres distincts

a) Premier chiffre : 9 choix (de 1 à 9) ; deuxième : 9 (tous sauf le premier, 0 compris) ; troisième : 8 ; quatrième : 7. Total $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$.

b) On commence par le chiffre **contraint** (le dernier) :

— dernier chiffre 0 : puis premier 9 choix, deuxième 8, troisième 7 : 504 ;

— dernier chiffre dans $\{2, 4, 6, 8\}$ (4 choix) : premier chiffre non nul et différent du dernier, 8 choix ; puis 8 et 7 : $4 \times 8 \times 8 \times 7 = 1\,792$.

$$504 + 1\,792 = 2\,296$$

c) Dernier chiffre 0 : 504. Dernier chiffre 5 : premier 8 choix (ni 0 ni 5), puis 8 et 7 : 448.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Total 952.

d) Si l'on choisit d'abord le premier chiffre, le nombre de choix pour le dernier (chiffre pair différent des précédents) dépend de la parité des chiffres déjà placés : le nombre de choix n'est pas constant d'une branche à l'autre, et le principe multiplicatif ne s'applique pas tel quel. On commence toujours par les contraintes, ou l'on découpe en cas.

Réponse. 4 536 ; 2 296 pairs ; 952 divisibles par 5.

Correction de l'exercice 6 – Le crible à trois ensembles

a) Notons A_d l'ensemble des multiples de d entre 1 et 1 000 ; $\operatorname{card} A_d = \left\lfloor \frac{1000}{d} \right\rfloor$, et $A_2 \cap A_3 = A_6$, etc. Par le crible :

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$$

b) Un entier est premier avec $30 = 2 \times 3 \times 5$ si et seulement s'il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 : complémentaire, $1\,000 - 734 = 266$.

c) $1\,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{800}{3} \approx 266{,}7$. L'écart vient des parties entières : 1 000 n'est pas multiple de 30. Sur $[\![1, 990]\!]$ (multiple de 30), le compte serait exactement $990 \times \frac{8}{30} = 264$, et les entiers de 991 à 1 000 premiers avec 30 sont 991 et 997 : $264 + 2 = 266$.

Réponse. 734 ; 266 premiers avec 30 ; $\frac{800}{3} \approx 266{,}7$ (écart dû aux parties entières).

Correction de l'exercice 7 – Étoiles et barres

a) À (x_1, x_2, x_3), on associe le mot formé de x_1 étoiles, une barre, x_2 étoiles, une barre, x_3 étoiles : 12 symboles dont 2 barres. Réciproquement, un tel mot se lit de façon unique comme une solution. Bijection avec le choix des positions des 2 barres parmi 12 :

$$\binom{12}{2} = 66$$

b) On pose $y_i = x_i - 1 \geq 0$: $y_1 + y_2 + y_3 = 7$, soit $\binom{9}{2} = 36$ solutions.

c) n étoiles et $k - 1$ barres : $\binom{n + k - 1}{k - 1}$.

d) $y_i = x_i - 2 \geq 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 4$: $\binom{6}{2} = 15$ répartitions.

Réponse. 66 ; 36 ; $\binom{n + k - 1}{k - 1}$; d) 15.

Correction de l'exercice 8 – Suites croissantes

a) Une application strictement croissante est déterminée par son image $\{f(1) < \ldots < f(k)\}$, partie à k éléments ; réciproquement, une partie à k éléments, rangée dans l'ordre croissant, définit une unique telle application. Nombre : $\binom{n}{k}$.

b) Si $f(i) \leq f(i+1)$, alors $g(i+1) - g(i) = f(i+1) - f(i) + 1 \geq 1$: g est strictement croissante, avec $1 \leq g(i) \leq n + k - 1$. Inversement $f(i) = g(i) - i + 1$. Bijection, donc

$$\operatorname{card}\{f \text{ croissante}\} = \binom{n + k - 1}{k}$$

c) Strictement croissantes : $\binom{5}{3} = 10$; croissantes : $\binom{7}{3} = 35$.

d) Un tirage avec remise sans ordre est une liste croissante de numéros (on range les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

boules tirées dans l'ordre) : 35 tirages possibles, et non $\frac{5^3}{3!}$ (qui n'est même pas entier). C'est le nombre de **combinaisons avec répétition**.

Réponse. $\binom{n}{k}$ strictement croissantes ; $\binom{n+k-1}{k}$ croissantes ; 10 et 35 pour $(n,k)=(5,3)$.

Correction de l'exercice 9 – Rectangles et carrés d'un échiquier

a) Le quadrillage a 9 lignes verticales et 9 horizontales. Un rectangle est déterminé par le choix de deux verticales (ses bords gauche et droit) et de deux horizontales, et réciproquement :

$$\binom{9}{2}\times\binom{9}{2}=36\times 36=1\,296$$

b) Un carré de côté k ($1\le k\le 8$) a son coin inférieur gauche dans une grille de $(9-k)^2$ positions. Total :

— $\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\sum_{j=1}^{8}j^2=\frac{8\times 9\times 17}{6}=204$.

c) Rectangles : $\binom{n+1}{2}^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; carrés : $\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (On remarque que le nombre de rectangles vaut $\sum_{j=1}^{n}j^3$.)

Réponse. 1 296 rectangles ; 204 carrés ; en général $\binom{n+1}{2}^2$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction de l'exercice 10 – Parties sans éléments consécutifs

a) $a_{i+1}\ge a_i+2$ donne $b_{i+1}-b_i=a_{i+1}-a_i-1\ge 1$: les b_i sont strictement croissants, avec $b_1=a_1\ge 1$ et $b_k=a_k-k+1\le n-k+1$.

b) Réciproquement, une partie $b_1<\ldots<b_k$ de $[\![1,n-k+1]\!]$ donne $a_i=b_i+i-1$, avec $a_{i+1}-a_i=b_{i+1}-b_i+1\ge 2$: pas de consécutifs. Bijection, donc

$$u(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$$

c) $u(10,3)=\binom{8}{3}=56$ grilles sur $\binom{10}{3}=120$, soit une proportion $\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\approx 47\,\%$. Plus de la moitié des grilles contiennent donc au moins deux numéros consécutifs, ce qui surprend souvent.

Réponse. $u(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$; 56 grilles sur 120, soit $\frac{7}{15}$.

Correction de l'exercice 11 – Le principe des tiroirs

Principe des tiroirs : si l'on range plus d'objets que de tiroirs, un tiroir en contient au moins deux.

a) 13 personnes (objets), 12 mois (tiroirs).

b) On découpe le carré en 4 carrés de côté 1 (tiroirs). Deux des 5 points sont dans un même petit carré, dont le diamètre (la diagonale) vaut $\sqrt{2}$: ils sont à distance au plus $\sqrt{2}$.

c) Tiroirs : les n paires $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$. Deux des $n+1$ entiers tombent dans la même paire : ils sont consécutifs, et deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.

d) Tout entier de $[\![1,2n]\!]$ s'écrit $2^a m$ avec m impair dans $[\![1,2n-1]\!]$: il y a n valeurs

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

possibles de m (tiroirs). Deux entiers ont le même m : $2^a m$ et $2^b m$ avec, disons, $a < b$, et le premier divise le second.

— (Les deux résultats sont optimaux : $\{2, 4, \ldots, 2n\}$ n'a pas de consécutifs, $\{n+1, \ldots, 2n\}$ n'a pas de divisibilité.)

Réponse. Tiroirs : 12 mois ; 4 petits carrés ; n paires $\{2i-1, 2i\}$; n parties impaires m.

Correction de l'exercice 12 – Lemme des poignées de main

a) On compte les couples (personne, poignée de main à laquelle elle participe). En comptant par personne : $\sum_i d_i$. En comptant par poignée : chaque poignée implique exactement 2 personnes, soit $2P$.

$$\sum_i d_i = 2P$$

b) $\sum d_i$ est pair ; la somme des d_i pairs est paire ; donc la somme des d_i impairs est paire, ce qui exige un nombre pair de termes impairs.

c) Non : $7 \times 3 = 21$ serait égal à $2P$, qui est pair.

d) Chaque personne serre $n-1$ mains : $2P = n(n-1)$, donc $P = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (une poignée est une paire de personnes).

Réponse. $\sum d_i = 2P$; nombre pair de degrés impairs ; 7×3 impossible ; $\binom{n}{2}$ poignées.

Correction de l'exercice 13 – Double comptage dans un réseau d'amitiés

a) Lemme des poignées de main : $2P = 30 \times 4 = 120$, donc $P = 60$ paires d'amis.

b) Chaque élève a $\binom{4}{2} = 6$ paires d'amis : il y a $30 \times 6 = 180$ couples (élève, paire de ses amis). Chaque trio fournit exactement 3 tels couples (chacun de ses membres avec les deux autres), et deux trios distincts fournissent des couples distincts. Donc

$$3T \leq 180, \qquad T \leq 60$$

c) $nd = 2P$ est pair.

Réponse. 60 paires ; au plus 60 trios ; $nd = 2P$ pair.

Correction de l'exercice 14 – Autour d'une table ronde

a) Chaque classe de placements (modulo rotation) contient exactement un placement où le convive 1 est sur le siège 1. Les $n-1$ autres convives se placent ensuite librement : $(n-1)!$ placements. Autre vue : $n!$ placements sur sièges numérotés, groupés par paquets de n rotations.

b) Pour $n \geq 3$, la symétrie associe à chaque placement un placement différent (le sens de parcours s'inverse) : on divise par 2, soit $\frac{(n-1)!}{2}$ (pour $n = 3$: 1, un seul « triangle »).

c) On colle chaque couple en un bloc : 4 blocs autour de la table, $(4-1)! = 6$ placements des blocs ; dans chaque bloc, 2 ordres possibles :

$$3! \times 2^4 = 96$$

Réponse. $(n-1)!$; $\frac{(n-1)!}{2}$; c) $3! \times 2^4 = 96$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une somme divisible par n

a) Les $n+1$ sommes $S_0, \ldots, S_n$ sont rangées selon leur reste modulo n, qui prend n valeurs : par le principe des tiroirs, deux ont le même reste.

b) Si $S_i \equiv S_j \pmod{n}$ avec $i < j$, alors

$$n \mid S_j - S_i = a_{i+1} + \ldots + a_j$$

— somme non vide de termes **consécutifs**.

c) $S = (0, 3, 11, 15, 22, 31)$, restes modulo 5 : $(0, 3, 1, 0, 2, 1)$. $S_0 \equiv S_3$: $3 + 8 + 4 = 15$, divisible par 5. (Aussi $S_2 \equiv S_5$: $4 + 7 + 9 = 20$.)

d) $n = 4$, trois entiers $(1, 1, 1)$: les sommes de termes consécutifs valent 1, 2 ou 3, jamais divisibles par 4.

Réponse. Tiroirs sur les restes des S_k ; c) $3 + 8 + 4 = 15$; d) $(1, 1, 1)$ pour $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).