Plaquette 4 – Surjections, partitions, permutations : dénombrements avancés

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dénombrements avancés (card$E = n$, card$F = p$).

— **Crible** : $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$.

— **Surjections** de E sur F :

$$s(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$$

— **Stirling** $S(n,k)$ (partitions de E en k blocs non vides) : $S(n,k) = \dfrac{s(n,k)}{k!}$ et $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

— **Bell** : $B_n = \sum_k S(n,k)$ (nombre de partitions de E), $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

— **Dérangements** : $D_n = n! \sum_{j=0}^{n} \dfrac{(-1)^j}{j!}$ et $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

— **Cycles** : il y a $(k-1)!$ cycles sur un ensemble à k éléments.

— Boules dans des boîtes : n boules **distinctes** dans k boîtes distinctes : k^n ; boules **identiques** : $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Correction de l’exercice 1 – Surjections sur un ensemble à 3 éléments

a) A_a : applications à valeurs dans $\{b,c\}$, 2^n. $A_a \cap A_b$: à valeurs dans $\{c\}$, 1. $A_a \cap A_b \cap A_c = \varnothing$.

b) Les non-surjections forment $A_a \cup A_b \cup A_c$. Par le crible :

$$|A_a \cup A_b \cup A_c| = 3 \times 2^n - 3 \times 1 + 0$$

— d’où $s(n,3) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

c) $n = 3$: $27 - 24 + 3 = 6 = 3!$ (une surjection entre ensembles de même cardinal est une bijection). $n = 4$: $81 - 48 + 3 = 36$.

d) C’est le nombre de surjections des 4 élèves sur les 3 ateliers : 36. Autre calcul : un atelier reçoit 2 élèves et les autres 1 ; on choisit l’atelier (3), les deux élèves ($\binom{4}{2} = 6$), puis on répartit les deux restants dans les deux autres ateliers (2) : $3 \times 6 \times 2 = 36$.

Réponse. $s(n,3) = 3^n - 3 \times 2^n + 3$; 6 pour $n = 3$, 36 pour $n = 4$.

Correction de l’exercice 2 – La formule générale des surjections

a) Pour $y \in F$, soit A_y l’ensemble des applications qui n’atteignent pas y. Une intersection de k tels ensembles est l’ensemble des applications à valeurs dans une partie à $p-k$ éléments : $(p-k)^n$. Il y a $\binom{p}{k}$ telles intersections. Par le crible, le nombre de non-surjections est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$s(n,p) = p^n - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1}\binom{p}{k}(p-k)^n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{p}{k}(p-k)^n$$

b) $s(2,3) = 9 - 3\times 4 + 3\times 1 - 0 = 0$ (pas de surjection d'un ensemble à 2 éléments sur un ensemble à 3). $s(3,3) = 27 - 24 + 3 = 6$.

c) Toutes les applications sauf les deux constantes : $2^n - 2$.

d) Une surjection de $n+1$ éléments sur n a exactement une valeur atteinte deux fois : on choisit les deux antécédents qui partagent leur image ($\binom{n+1}{2}$), puis on associe bijectivement les n « paquets » aux n images ($n!$) : $\binom{n+1}{2}n! = \frac{n}{2}(n+1)!$. Pour $n=2$: $s(3,2) = 8 - 2 = 6 = \frac{2}{2}\times 6$.

Réponse. $s(n,p) = \sum_k (-1)^k\binom{p}{k}(p-k)^n$; $s(2,3)=0$, $s(3,3)=6$; $s(n+1,n) = \frac{n}{2}(n+1)!$.

Correction de l'exercice 3 – Nombres de Stirling de seconde espèce

a) Une surjection de E sur $\{1,\dots,k\}$ est la donnée d'une partition de E en k blocs (les images réciproques) et d'une numérotation de ces blocs ($k!$ façons). Donc $s(n,k) = k!S(n,k)$.

— $S(4,2) = \frac{s(4,2)}{2} = \frac{16-2}{2} = 7$; $S(4,3) = \frac{36}{6} = 6$.

b) Soit une partition de $\{1,\dots,n\}$ en k blocs. Si $\{n\}$ est un bloc, le reste est une partition de $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ blocs ; sinon, on retire n de son bloc et l'on obtient une partition de $\{1,\dots,n-1\}$ en k blocs, où n pouvait être dans l'un quelconque des k blocs :

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

c) Lignes ($k=1,\dots,n$) : $n=1$: 1 ; $n=2$: $1,1$; $n=3$: $1,3,1$; $n=4$: $1,7,6,1$; $n=5$: $1,15,25,10,1$ (par exemple $S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = 7 + 18 = 25$).

d) $S(n,2) = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1} - 1$. Une partition en $n-1$ blocs a un bloc de 2 éléments et des singletons : elle est déterminée par ce bloc, $\binom{n}{2}$.

Réponse. $S(4,2)=7$, $S(4,3)=6$; récurrence $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$; ligne 5 : $1,15,25,10,1$.

Correction de l'exercice 4 – Nombres de Bell

a) $B_n = \sum_k S(n,k)$: $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3 = 1+3+1 = 5$, $B_4 = 1+7+6+1 = 15$. Partitions de $\{1,2,3\}$: {123}, {1}{23}, {2}{13}, {3}{12}, {1}{2}{3}.

b) Si le bloc de $n+1$ contient, en plus de $n+1$, un ensemble A de $n-k$ autres éléments, les k éléments restants forment une partition quelconque : B_k possibilités. On choisit A de $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ façons :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

c) $B_5 = \binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 + \binom{4}{4}B_4 = 1 + 4 + 12 + 20 + 15 = 52$. (Contrôle par la ligne 5 du tableau de Stirling : $1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$.)

d) Une relation d'équivalence correspond bijectivement à la partition en classes d'équivalence : $B_4 = 15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $B_1..B_4 = 1, 2, 5, 15$; $B_{n+1} = \sum \binom{n}{k} B_k$; $B_5 = 52$; 15 relations d'équivalence.

Correction de l'exercice 5 – Récurrence des dérangements

a) Il y a $n-1$ choix pour k. Ensuite :

— si $\sigma(k) = n$: σ échange k et n, et induit un dérangement des $n-2$ autres éléments : D_{n-2} possibilités ;

— si $\sigma(k) \neq n$: on « court-circuite » n. Soit j l'unique indice tel que $\sigma(j) = n$ (on a $j \neq k$ et $j \neq n$) ; on pose $\sigma'(j) = k$ et $\sigma'(i) = \sigma(i)$ pour les autres $i \leq n-1$. Alors σ' est un dérangement de $n-1$ éléments (car $j \neq k$), et la correspondance est bijective : D_{n-1} possibilités.

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

b) $D_3 = 2(1+0) = 2$, $D_4 = 3(2+1) = 9$, $D_5 = 4(9+2) = 44$.

c) $5!\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.

d) On choisit les 2 points fixes ($\binom{5}{2} = 10$), puis un dérangement des 3 autres ($D_3 = 2$) : 20 permutations.

Réponse. $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$; $D_3 = 2$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$; 20 permutations à 2 points fixes.

Correction de l'exercice 6 – Involutions

a) Si $\sigma(i) = j \neq i$, alors $\sigma(j) = \sigma^2(i) = i$: i et j sont échangés. Les éléments se répartissent en points fixes et en paires échangées, disjointes.

b) Si $\sigma(n) = n$, σ induit une involution des $n-1$ autres : I_{n-1}. Sinon $\sigma(n) = k$ ($n-1$ choix), σ échange k et n et induit une involution des $n-2$ autres : $(n-1)I_{n-2}$.

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

c) $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 2 + 2 \times 1 = 4$, $I_4 = 4 + 3 \times 2 = 10$, $I_5 = 10 + 4 \times 4 = 26$.

d) $n = 4$: 0 transposition (l'identité) : 1 ; une transposition : $\binom{4}{2} = 6$; deux transpositions disjointes : 3 (façons de couper $\{1,2,3,4\}$ en deux paires). Total 10.

Réponse. $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$; $1, 2, 4, 10, 26$.

Correction de l'exercice 7 – Permutations d'un type de cycles donné

a) Un cycle $(a_1\, a_2 \ldots a_k)$ s'écrit de k façons (on peut commencer par n'importe quel élément). En imposant de commencer par un élément fixé, on range les $k-1$ autres librement : $(k-1)!$ cycles.

b) Type par type :

— identité : 1 ;

— une transposition : $\binom{4}{2} = 6$;

— deux transpositions : 3 ;

— un 3-cycle : $\binom{4}{3} \times 2! = 8$;

— un 4-cycle : $3! = 6$.

$$1 + 6 + 3 + 8 + 6 = 24 = 4!$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On partage $[\![1,6]\!]$ en deux blocs de 3 : $\frac{\binom{6}{3}}{2} = 10$ partages (on divise par 2 car les deux blocs ne sont pas ordonnés). Chaque bloc porte $2! = 2$ cycles : $10 \times 2 \times 2 = 40$.

Réponse. $(k-1)!$ cycles ; $1+6+3+8+6 = 24$; 40 permutations.

Correction de l'exercice 8 – Relations binaires

a) $\mathrm{card} P(E \times E) = 2^{n^2}$.

b) **Réflexive** : les n couples (x,x) sont imposés, les $n^2 - n$ autres sont libres : $2^{n(n-1)}$.

— **Symétrique** : les couples (x,x) sont libres (n choix binaires) et chaque paire $\{x,y\}$ est entièrement dedans ou dehors ($\binom{n}{2}$ choix binaires) :

$$2^{n+\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

— Réflexive et symétrique : $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

c) Antisymétrique : pour chaque paire $\{x,y\}$, trois possibilités sur quatre (ni l'un ni l'autre, (x,y) seul, (y,x) seul) ; les (x,x) sont libres : $2^n 3^{\binom{n}{2}}$.

d) $n=3$: $2^9 = 512$ relations ; $2^6 = 64$ réflexives ; $2^6 = 64$ symétriques ; $2^3 = 8$ réflexives et symétriques ; $2^3 \times 3^3 = 216$ antisymétriques.

Réponse. 2^{n^2} ; $2^{n(n-1)}$; $2^{n(n+1)/2}$; $2^{n(n-1)/2}$; $2^n 3^{n(n-1)/2}$.

Correction de l'exercice 9 – Boules et boîtes : le tableau à quatre cases

a) Chaque boule choisit sa boîte : $2^4 = 16$. Aucune boîte vide : surjections, $16 - 2 = 14$.

b) Seul compte le nombre de boules dans chaque boîte : $x_1 + x_2 = 4$ dans $\mathbb{N}$, $\binom{5}{1} = 5$ rangements ; avec $x_i \geq 1$: $\binom{3}{1} = 3$ ($(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$).

c) Un rangement est une partition des 4 boules en au plus 2 blocs :
$S(4,1) + S(4,2) = 1 + 7 = 8$; aucune boîte vide : $S(4,2) = 7$ (c'est a) divisé par $2! = 2$: $\frac{14}{2}$).

d) En général, n boules, k boîtes, aucune vide :

$$\text{distinctes/distinctes} : s(n,k), \quad \text{identiques/distinctes} : \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{distinctes/identiques} : S(n,k)$$

Réponse. a) 16 et 14 ; b) 5 et 3 ; c) 8 et 7.

Correction de l'exercice 10 – Applications idempotentes

a) Si $f \circ f = f$ et $y = f(x)$, alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. Réciproquement, si $f(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Im} f$, alors $f(f(x)) = f(x)$ car $f(x) \in \mathrm{Im} f$.

b) Si l'image est I ($\mathrm{card} I = k$), f est imposée sur I (identité), et chacun des $n-k$ autres éléments est envoyé n'importe où dans I : k^{n-k} possibilités (toutes ont bien pour image I, puisque I est déjà atteint par lui-même).

c) On somme sur le choix de I :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $n=3$: $\binom{3}{1}\times 1^2+\binom{3}{2}\times 2^1+\binom{3}{3}\times 3^0=3+6+1=10$.

Réponse. f idempotente $\Leftrightarrow f=\mathrm{id}$ sur $\mathrm{Im}f$; $\sum_k\binom{n}{k}k^{n-k}$; 10 pour $n=3$.

Correction de l'exercice 11 – Anagrammes sans lettres voisines identiques

a) $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}=90$.

b) On colle AA en un seul symbole : mots de 5 symboles (AA, B, B, C, C), soit $\frac{5!}{2!\,2!}=30$. Deux blocs : 4 symboles dont deux C, $\frac{4!}{2!}=12$. Trois blocs : $3!=6$.

c) Soit X_A (resp. X_B, X_C) l'ensemble des anagrammes où les deux A sont voisins. Par symétrie et par le crible :

$$|X_A\cup X_B\cup X_C|=3\times 30-3\times 12+6=60$$

— Anagrammes sans lettres identiques voisines : $90-60=30$ (par exemple $ABCABC$, $ABACBC$).

Réponse. 90 anagrammes ; 30, 12, 6 ; 30 sans lettres identiques voisines.

Correction de l'exercice 12 – Mots binaires sans deux 1 consécutifs

a) $a_1=2$ (0, 1) ; $a_2=3$ (00, 01, 10) ; $a_3=5$ (000, 001, 010, 100, 101).

b) Si le mot finit par 0, ce qui précède est un mot valide de longueur $n-1$: a_{n-1}. S'il finit par 1, l'avant-dernière lettre est 0, et ce qui précède est un mot valide de longueur $n-2$: a_{n-2}.

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

c) $a_4=8$, $a_5=13$. Avec $F_0=0$, $F_1=1$: $a_n=F_{n+2}$.

d) Un mot à k lettres 1 non consécutives correspond à une partie à k éléments de $[\![1,5]\!]$ sans éléments consécutifs : $\binom{5-k+1}{k}$. Donc
$a_5=\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3}=1+5+6+1=13$.

Réponse. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_n=F_{n+2}$; $a_5=13=1+5+6+1$.

Correction de l'exercice 13 – Pavages d'une bande par des dominos

a) $t_1=1$ (un domino vertical) ; $t_2=2$ (deux verticaux, ou deux horizontaux superposés) ; $t_3=3$.

b) La colonne de gauche est couverte soit par un domino **vertical** (il reste une bande $2\times(n-1)$: t_{n-1}), soit par deux dominos **horizontaux** superposés, qui couvrent les deux premières colonnes (il reste $2\times(n-2)$: t_{n-2}). Aucun autre cas n'est possible.

$$t_n=t_{n-1}+t_{n-2}$$

c) $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$: $t_{10}=89$ (et $t_n=F_{n+1}$).

d) À un pavage de la bande $2\times n$, on associe le mot $w_1\cdots w_{n-1}$ où $w_i=1$ si deux dominos horizontaux occupent les colonnes i et $i+1$, et $w_i=0$ sinon. Deux blocs horizontaux ne peuvent pas se chevaucher, donc le mot n'a pas deux 1 consécutifs ; réciproquement, un tel mot indique où placer les blocs horizontaux, le reste étant rempli de dominos verticaux. Cette bijection donne $t_n=a_{n-1}$, en accord avec les récurrences ($t_1=a_0=1$, $t_2=a_1=2$).

Réponse. $t_n=t_{n-1}+t_{n-2}$; $t_{10}=89$; $t_n=a_{n-1}=F_{n+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Formule du crible générale

a) Dans $\sum_{i_1<\ldots<i_k}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|$, l'élément x est compté une fois pour chaque famille de k indices parmi les m ensembles qui le contiennent : $\binom{m}{k}$ fois. Avec les signes : $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}$.

b) Par le binôme, $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}=0$, donc

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}=-\left(0-\binom{m}{0}\right)=1$$

— Chaque élément de la réunion est compté exactement une fois (et les éléments hors de la réunion zéro fois) : la formule est démontrée.

c) $210=2\times3\times5\times7$. Les multiples d'un produit d de certains de ces nombres sont au nombre de $\frac{210}{d}$. Le nombre d'entiers premiers avec 210 est

— $210\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=210\times\frac{1\times2\times4\times6}{210}=48$ (développer le produit redonne exactement la formule du crible, car tous les quotients sont entiers).

Réponse. Chaque élément compté 1 fois ; 48 entiers de $[\![1,210]\!]$ premiers avec 210.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : combien de surjections, par trois méthodes

a) $s(5,3)=3^5-3\times2^5+3\times1^5=243-96+3=150$.

b) $S(5,3)=S(4,2)+3S(4,3)=7+3\times6=25$, puis

$$s(5,3)=3!\times25=150$$

c) Effectifs $(3,1,1)$: on choisit l'image atteinte 3 fois (3), ses antécédents ($\binom{5}{3}=10$), puis on répartit bijectivement les 2 restants sur les 2 autres images (2) : 60. Effectifs $(2,2,1)$: on choisit l'image atteinte une seule fois (3) et son antécédent (5), puis on partage les 4 restants en $2+2$ entre les deux autres images, ordonnées ($\binom{4}{2}=6$) : 90. Total $60+90=150$.

d) $\frac{150}{3^5}=\frac{150}{243}=\frac{50}{81}\approx62\,\%$.

Réponse. $s(5,3)=150$ (crible, $3!\times25$, $60+90$) ; proportion $\frac{50}{81}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).