Plaquette 3 – Coefficients binomiaux : identités et propriétés

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Une identité entre coefficients binomiaux se démontre de trois façons, qu'il faut savoir mobiliser : **combinatoirement** (compter un même ensemble de deux manières, ou exhiber une bijection), **algébriquement** (formule du binôme, dérivation, comparaison de coefficients dans un produit de polynômes), ou **par récurrence** avec la formule de Pascal. On cherche d'abord l'interprétation combinatoire, qui explique l'identité ; le calcul sert de vérification. On étudie aussi la taille des coefficients (croissance jusqu'au milieu, encadrement de $\binom{2n}{n}$) et leur arithmétique (divisibilité par un nombre premier).

Exercice 1 – La formule de Vandermonde

Soient m, n, p des entiers naturels.

a) Un comité de p personnes est choisi parmi m femmes et n hommes. En comptant selon le nombre k de femmes, démontrer la formule de Vandermonde.

b) La retrouver en comparant le coefficient de X^p dans $(1+X)^m(1+X)^n = (1+X)^{m+n}$.

c) Application : calculer $\sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k}\binom{5}{3-k}$.

Exercice 2 – Somme des carrés des coefficients binomiaux

a) Déduire de Vandermonde que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b) Donner une interprétation avec des chemins dans un quadrillage : un chemin de $(0,0)$ à (n,n) fait $2n$ pas (droite ou haut) ; compter selon le point où il coupe l'anti-diagonale $x+y=n$.

c) Vérifier pour $n=4$.

Exercice 3 – La crosse de hockey

a) En classant les parties à $p+1$ éléments de $[\![1, n+1]\!]$ selon leur plus grand élément, démontrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b) La retrouver par récurrence sur n avec la formule de Pascal.

c) Application : calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 4 – Formule du pion et moments

a) Démontrer $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ par le calcul, puis par un argument de comité avec président.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire $\sum_k k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

c) Montrer que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ et en déduire $\sum_k k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$.

d) Vérifier pour $n = 3$.

Exercice 5 – Sommes binomiales par le binôme

Calculer, pour $n \geq 2$:

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$;

b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ (intégrer $(1+x)^n$) ;

d) Interpréter a) combinatoirement : colorier chaque élément d'un ensemble à n éléments en bleu, blanc ou rouge.

Exercice 6 – Coefficients multinomiaux

a) Combien d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ?

b) Justifier la formule $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$ en plaçant successivement les lettres de chaque type.

c) Quel est le coefficient de a^2b^3c dans $(a+b+c)^6$?

d) Montrer que $\sum \frac{n!}{i!j!k!} = 3^n$, la somme portant sur les triplets (i,j,k) d'entiers naturels de somme n.

Exercice 7 – Monotonie et maximum des coefficients binomiaux

a) Montrer que $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}$.

b) En déduire que $k \mapsto \binom{n}{k}$ est croissante pour $k \leq \frac{n-1}{2}$ et décroissante ensuite, et qu'elle atteint son maximum en $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

c) Montrer que $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$.

d) Vérifier pour $n = 5$.

Exercice 8 – Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier.

a) Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour $0 < k < p$ (utiliser $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et le lemme de Gauss).

b) En déduire que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ pour tous entiers a, b.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Démontrer le petit théorème de Fermat : $a^p \equiv a \pmod p$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ (récurrence sur a).

d) Montrer que $\binom{4}{2} = 6$ n'est pas divisible par 4 : où la preuve de a) échoue-t-elle ?

Exercice 9 – Nombres de Catalan par réflexion

On compte les chemins de $(0,0)$ à (n,n) formés de pas « droite » $(1,0)$ et « haut » $(0,1)$ qui ne passent jamais strictement au-dessus de la diagonale $y = x$.

a) Un chemin « mauvais » touche la droite $y = x + 1$. En réfléchissant la partie du chemin située après le premier contact par rapport à cette droite, montrer que les mauvais chemins sont en bijection avec les chemins de $(0,0)$ à $(n-1, n+1)$.

b) En déduire que le nombre de bons chemins est $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

c) Calculer C_1, C_2, C_3, C_4 et vérifier C_3 en énumérant.

Exercice 10 – Comité et sous-comité

a) Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ pour $m \le k \le n$ (choisir un comité de k personnes puis un bureau de m membres en son sein).

b) En déduire $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

c) Retrouver b) en dérivant m fois $(1+x)^n$, ou en interprétant avec trois statuts (bureau, simple membre, non-membre).

d) Vérifier pour $n = 4$, $m = 2$.

Exercice 11 – Parité des coefficients binomiaux

On travaille dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

a) Montrer que $(1+X)^2 = 1 + X^2$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, puis que $(1+X)^{2^m} = 1 + X^{2^m}$.

b) En déduire que $\binom{2^m}{k}$ est pair pour $0 < k < 2^m$.

c) Écrire la ligne 8 du triangle de Pascal et vérifier.

d) Que dire de la parité de $\binom{2^m - 1}{k}$? (Utiliser $(1+X)^{2^m} = (1+X)(1+X)^{2^m - 1}$.)

Exercice 12 – Somme des coefficients de rang multiple de 3

Soit $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $S_n = \sum_{k \equiv 0\ (3)} \binom{n}{k}$.

a) Montrer que $1 + j^k + j^{2k}$ vaut 3 si $3 \mid k$ et 0 sinon.

b) En déduire $3S_n = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$.

c) Montrer que $1 + j = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ et conclure $S_n = \dfrac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$.

d) Vérifier pour $n = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Sommes alternées partielles

a) Montrer par la formule de Pascal que $(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{n-1}{k-1} + (-1)^k\binom{n-1}{k}$, et en déduire, par télescopage, que pour $0 \leq m \leq n-1$:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$$

b) Vérifier pour $n = 5$ et $m = 0, 1, 2, 3$.

c) Que devient la formule pour $m = n$?

Exercice 14 – Symétrie et chemins : deux identités en une

Dans un quadrillage, on compte les chemins de $(0,0)$ à (a,b) faits de pas droite et haut.

a) Justifier qu'il y en a $\binom{a+b}{a}$.

b) En classant les chemins de $(0,0)$ à (a,b) selon le dernier pas, retrouver la formule de Pascal.

c) En classant les chemins de $(0,0)$ à (n,n) passant par le point (k,k) pour un k fixé, montrer que le nombre de chemins passant par la diagonale en (k,k) vaut $\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

d) Pour $n = 2$, vérifier que $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{4-2k}{2-k}$ vaut $4^2 = 16$ (identité admise en général).

Exercice 15 – Synthèse : inversion de Pascal et dérangements

a) Soient (a_n) et (b_n) telles que $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ pour tout n. Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k$ (on pourra utiliser $\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{j}{k} = \delta_{nk}$, conséquence de l'exercice « comité et sous-comité »).

b) Un **dérangement** de $[\![1,n]\!]$ est une permutation sans point fixe ; on note D_n leur nombre ($D_0 = 1$). En classant les permutations selon l'ensemble de leurs points fixes, montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.

c) En déduire $D_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$ et calculer D_4.

d) Vérifier $D_3 = 2$ en énumérant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).