Plaquette 5 – Dénombrement en situation : jeux, réseaux, codes

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Face à un problème concret, on commence par **modéliser** : quels sont les objets comptés (listes, parties, applications, partitions) ? L'ordre compte-t-il ? Les répétitions sont-elles possibles ? Les éléments sont-ils discernables ? On choisit alors la formule adaptée, en découpant si nécessaire en cas disjoints ou en passant par le complémentaire. On contrôle toujours le résultat : ordre de grandeur, petit cas énuméré à la main, ou programme qui compte par force brute. Ces dénombrements préparent directement les calculs de probabilités sur des univers finis équiprobables.

Exercice 1 – Le loto

Une grille de loto consiste à cocher 6 numéros parmi 49 ; le tirage désigne 6 numéros gagnants.

a) Combien y a-t-il de grilles possibles ?

b) Combien de grilles ont exactement 3 bons numéros ? exactement k ?

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}\binom{43}{6-k} = \binom{49}{6}$ et nommer cette identité.

d) Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 bons numéros ? (On admettra $\binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13\,545$, $\binom{6}{5}\binom{43}{1} = 258$.)

Exercice 2 – Le paradoxe des anniversaires

On considère n personnes et l'on suppose les 365 dates d'anniversaire équiprobables (années non bissextiles).

a) Combien de listes de n dates sont possibles ? Combien ont toutes leurs dates distinctes ?

b) En déduire la probabilité p_n qu'au moins deux personnes aient le même anniversaire.

c) On donne $\prod_{k=0}^{22} \frac{365-k}{365} \approx 0{,}4927$. Que vaut p_{23} ? Commenter.

d) Justifier l'approximation $1 - p_n \approx \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right)$ et la tester pour $n = 23$.

Exercice 3 – Chemins avec un carrefour interdit

Dans un quadrillage de rues, on va de $(0,0)$ à $(5,5)$ en faisant des pas vers l'est ou vers le nord.

a) Combien de trajets possibles ?

b) Le carrefour $(2,2)$ est fermé. Combien de trajets l'évitent ?

c) Les carrefours $(2,2)$ et $(3,3)$ sont fermés. Combien de trajets les évitent (crible) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Tournois

Dans un tournoi, chacune des n équipes rencontre une fois chacune des autres ; il n'y a pas de match nul.

a) Combien de matchs sont joués ?

b) Combien de résultats globaux du tournoi sont possibles ?

c) Combien de classements finaux sans ex æquo ?

d) Pour $n = 4$, quelle est la somme des nombres de victoires des équipes ? Toutes les équipes peuvent-elles avoir le même nombre de victoires ?

Exercice 5 – Graphes à 4 sommets

On considère les graphes simples (sans boucle ni arête multiple) sur les sommets $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Combien y en a-t-il ?

b) Combien ont exactement 3 arêtes ?

c) Parmi ces derniers, combien sont des triangles ? des étoiles (un sommet relié aux trois autres) ? des chemins ? Vérifier la somme.

d) Combien de graphes sur $\{1, 2, 3, 4\}$ sont **complets** sur un sous-ensemble de 3 sommets et ont un sommet isolé ?

Exercice 6 – Mains au jeu de 32 cartes

On distribue 8 cartes d'un jeu de 32 (4 couleurs, 8 hauteurs dont l'as).

a) Combien de mains possibles ?

b) Combien contiennent exactement 2 as ? au moins un as ?

c) Combien contiennent au moins une carte de chaque couleur ? (Crible sur les couleurs absentes.)

Exercice 7 – Codes à quatre chiffres

Un code secret est une suite de 4 chiffres.

a) Combien de codes possibles ?

b) Combien ont leurs chiffres tous distincts ? au moins deux chiffres égaux ?

c) Combien sont formés de chiffres rangés dans l'ordre strictement croissant ? dans l'ordre croissant au sens large ?

d) Un voleur a vu les traces de doigts sur les touches 1, 3, 5, 7 (chaque chiffre est utilisé au moins une fois, et il n'y en a pas d'autre). Combien de codes doit-il essayer ?

Exercice 8 – Former des équipes

12 joueurs doivent être répartis en 3 équipes de 4.

a) Combien de répartitions si les équipes sont numérotées (équipe 1, 2, 3) ?

b) Combien si les équipes ne sont pas numérotées ?

c) Combien de répartitions (équipes non numérotées) où les joueurs A et B sont dans la même équipe ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) En déduire la probabilité que A et B soient coéquipiers, et la retrouver directement.

Exercice 9 – Triangles inscrits dans un octogone

On considère un octogone régulier et les triangles dont les sommets sont des sommets de l'octogone.

a) Combien y a-t-il de tels triangles ?

b) Combien ont exactement deux côtés qui sont des côtés de l'octogone ? exactement un ?

c) En déduire le nombre de triangles n'ayant aucun côté commun avec l'octogone, et vérifier la formule $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ pour $n = 8$.

Exercice 10 – Compter par programme

On veut compter les parties à 3 éléments de $[\![1, 20]\!]$ dont la somme vaut 30.

a) Écrire une fonction Python qui énumère les triplets $a < b < c$ et compte ceux de somme 30.

b) Le programme renvoie 45. Expliquer pourquoi on peut se limiter à $a < b$ et calculer $c = 30 - a - b$ (programme plus rapide), et l'écrire.

c) Retrouver le résultat « à la main » en comptant, pour chaque a, les valeurs possibles de b.

Exercice 11 – Étoiles et barres avec plafond

On répartit 10 bonbons identiques entre 3 enfants, chacun pouvant en recevoir au plus 4.

a) Sans le plafond, combien de répartitions ?

b) Soit A_i l'ensemble des répartitions où l'enfant i reçoit au moins 5 bonbons. Calculer $|A_i|$ et $|A_i \cap A_j|$.

c) En déduire le nombre de répartitions respectant le plafond, et les énumérer.

Exercice 12 – Amis ou inconnus : le nombre de Ramsey R(3, 3)

Dans un groupe de 6 personnes, deux personnes quelconques sont soit amies, soit inconnues l'une de l'autre.

a) Soit A une des personnes. Montrer que A a au moins 3 amis ou au moins 3 inconnus parmi les 5 autres.

b) En déduire qu'il existe 3 personnes deux à deux amies, ou 3 personnes deux à deux inconnues.

c) Montrer que le résultat est faux pour 5 personnes (considérer un pentagone où chacun est ami de ses deux voisins).

Exercice 13 – Boules de Hamming et codes correcteurs

On considère les mots binaires de longueur 7. La distance entre deux mots est le nombre de positions où ils diffèrent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Combien de mots sont à distance au plus 1 d'un mot donné ? à distance exactement 2 ?

b) Un code corrige une erreur si les boules de rayon 1 centrées sur ses mots sont deux à deux disjointes. Montrer qu'un tel code a au plus $\frac{2^7}{8} = 16$ mots (borne de Hamming).

c) Le code de Hamming a exactement 16 mots : que peut-on dire de ses boules de rayon 1 ?

d) Généraliser la borne à des mots de longueur n et des boules de rayon 1.

Exercice 14 – Plaques d'immatriculation

Une plaque est de la forme « deux lettres – trois chiffres – deux lettres ». On suppose que 23 lettres sont autorisées et que le bloc de chiffres va de 001 à 999.

a) Combien de plaques sont possibles ?

b) À raison de 2 millions d'immatriculations par an, combien d'années le système peut-il durer ?

c) Combien de plaques ont leurs quatre lettres identiques ? un bloc de chiffres palindrome (comme 121 ou 505) ?

Exercice 15 – Synthèse : le problème des rencontres

Une secrétaire distraite place au hasard n lettres dans n enveloppes adressées (une lettre par enveloppe, toutes les répartitions équiprobables).

a) Quel est l'univers ? son cardinal ?

b) Quelle est la probabilité qu'aucune lettre ne soit dans la bonne enveloppe ? (Utiliser les dérangements.)

c) Calculer cette probabilité pour $n = 3, 4, 5$ et déterminer sa limite.

d) Quelle est la probabilité qu'exactement une lettre soit bien placée, pour $n = 5$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).