Plaquette 1 – Listes, arrangements, combinaisons et formules de dénombrement

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On identifie si l'**ordre** compte et s'il y a **répétition**, on choisit la formule adaptée (liste, arrangement, combinaison), on découpe par **principe additif** ou **multiplicatif**, et on utilise le **complémentaire** ou le **crible** quand le comptage direct est lourd.

Exercice 1 – Listes et arrangements

Un code est formé de 4 caractères choisis parmi 26 lettres.

a) Combien de codes si les répétitions sont autorisées ?

b) Combien si toutes les lettres doivent être distinctes ?

Exercice 2 – Combinaisons

Dans une classe de 30 élèves, on forme une délégation de 3 élèves.

a) Combien de délégations possibles ?

b) Combien contiennent un élève précis, Léa ?

Exercice 3 – Passage par le complémentaire

Combien de tirages de 5 cartes dans un jeu de 32 contiennent **au moins un** as ?

Exercice 4 – Anagrammes

Combien d'anagrammes du mot **MATHS** ? Et du mot **CALCUL** ?

Exercice 5 – Chemins sur une grille

Combien de chemins mènent du point $(0, 0)$ au point $(5, 3)$ en n'effectuant que des pas $+1$ vers la droite ou $+1$ vers le haut ?

Exercice 6 – Formule de Pascal

Démontrer la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ par un argument de dénombrement.

Exercice 7 – Crible

Parmi les entiers de 1 à 100, combien sont divisibles par 2 ou par 3 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Applications et injections

Soient E à 3 éléments et F à 5 éléments.

a) Combien d'applications de E dans F ?

b) Combien d'injections ?

c) Combien de surjections de F sur E existe-t-il ? (question ouverte : justifier qu'il y en a)

Exercice 9 – Parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à 10 éléments.

a) Combien de parties possède-t-il ?

b) Combien de parties à nombre **pair** d'éléments ?

Exercice 10 – Répartitions en groupes

De combien de façons peut-on répartir 12 personnes en 3 groupes de 4 ?

a) si les groupes sont **numérotés** (A, B, C) ;

b) si les groupes sont **indiscernables**.

Exercice 11 – Somme binomiale

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 12 – Diagonales d'un polygone convexe

Soit un polygone convexe à n sommets ($n \geq 4$), dont trois diagonales ne sont jamais concourantes en un point intérieur.

a) Combien a-t-il de diagonales ? Application au décagone.

b) Montrer que les points d'intersection de deux diagonales situés à l'intérieur du polygone sont en bijection avec les parties à 4 éléments de l'ensemble des sommets. En déduire leur nombre pour le décagone.

Exercice 13 – Double comptage : présidents de comités

Dans une association de n membres, on forme un comité (partie quelconque, non vide) puis on choisit un président parmi ses membres.

a) En comptant d'abord le comité de taille k, montrer que le nombre de choix est $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

b) En comptant d'abord le président, montrer que ce nombre vaut $n2^{n-1}$.

c) En déduire l'identité $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et la vérifier pour $n = 3$.

d) Retrouver ce résultat en dérivant $(1+x)^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Mots de passe

Un mot de passe est formé de 8 caractères pris parmi les 26 lettres minuscules et les 10 chiffres (répétitions autorisées).

a) Combien y a-t-il de mots de passe ?

b) Combien contiennent au moins un chiffre ?

c) Combien contiennent au moins une lettre **et** au moins un chiffre ?

d) Combien ont leurs 8 caractères tous distincts ?

Exercice 15 – Synthèse : mains de poker

Dans un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes. Calculer le nombre de mains contenant :

a) exactement une paire (et rien de mieux : pas de brelan, pas de deuxième paire) ;

b) un brelan exactement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).