Plaquette 2 – Principes de dénombrement : bijections, produit, tiroirs

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dénombrer, c'est **construire une bijection** entre l'ensemble étudié et un ensemble dont on connaît le cardinal (listes, parties, applications), ou le **découper** : en morceaux disjoints (principe additif), en étapes successives dont le nombre de choix ne dépend pas des choix précédents (principe multiplicatif), par le complémentaire, ou par le crible si les morceaux se chevauchent. Le **double comptage** d'un même ensemble de deux façons fournit des identités, et le **principe des tiroirs** ($n+1$ objets dans n tiroirs) donne des existences sans calcul. On justifie toujours pourquoi chaque objet est compté **exactement une fois**.

Exercice 1 – Compter les diviseurs

a) Décomposer 720 en facteurs premiers et déterminer le nombre de ses diviseurs positifs, en construisant une bijection avec un produit cartésien.

b) Combien de diviseurs de 720 sont pairs ? Sont des carrés parfaits ?

c) Montrer qu'un entier $n \geq 2$ a un nombre impair de diviseurs si et seulement si c'est un carré.

Exercice 2 – Applications et injections

Soient E à 3 éléments et F à 5 éléments.

a) Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? d'injections ?

b) Interpréter : on attribue à chacun de 3 élèves une salle parmi 5. Combien d'attributions séparent tous les élèves ?

c) Combien y a-t-il d'applications de F dans E ? Peut-il y avoir des injections ?

d) Justifier la formule $\frac{n!}{(n-p)!}$ pour le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exercice 3 – Parties et mots binaires

Soit $E = \{1, \dots, n\}$.

a) Construire une bijection entre $P(E)$ et $\{0,1\}^n$ et en déduire $\operatorname{card} P(E) = 2^n$.

b) Montrer que $A \mapsto \overline{A}$ (complémentaire) est une bijection de l'ensemble des parties à k éléments sur celui des parties à $n-k$ éléments. En déduire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ par un argument de dénombrement.

Exercice 4 – Autant de parties paires que de parties impaires

Soit $E = \{1, \dots, n\}$ avec $n \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $\varphi : A \mapsto A \,\Delta\, \{1\}$ (on ajoute 1 s'il n'y est pas, on l'enlève sinon) est une bijection de $P(E)$ dans lui-même qui change la parité du cardinal.

b) En déduire qu'il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair, et que chacun de ces nombres vaut 2^{n-1}.

c) En déduire $\sum_k \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ et $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

d) Vérifier pour $n = 4$.

Exercice 5 – Nombres à chiffres distincts

On considère les entiers à 4 chiffres (le premier non nul) dont les chiffres sont deux à deux distincts.

a) Combien y en a-t-il ?

b) Combien sont pairs ? (Distinguer selon que le dernier chiffre est 0 ou non.)

c) Combien sont divisibles par 5 ?

d) Pourquoi ne peut-on pas répondre à b) en commençant par le premier chiffre avec un principe multiplicatif direct ?

Exercice 6 – Le crible à trois ensembles

a) Combien d'entiers de 1 à 1 000 sont divisibles par 2, par 3 ou par 5 ?

b) En déduire combien sont premiers avec 30.

c) Comparer avec $1\,000 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$ et expliquer l'écart.

Exercice 7 – Étoiles et barres

a) Montrer que le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ avec $x_i \in \mathbb{N}$ est $\binom{12}{2} = 66$, en codant une solution par un mot de 10 étoiles et 2 barres.

b) Combien de solutions avec $x_i \geq 1$?

c) Généraliser : nombre de solutions de $x_1 + \ldots + x_k = n$ dans $\mathbb{N}$.

d) Application : de combien de façons peut-on répartir 10 bonbons identiques entre 3 enfants de sorte que chacun en ait au moins 2 ?

Exercice 8 – Suites croissantes

Soient $k \leq n$.

a) Montrer que les applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ sont en bijection avec les parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$. Combien y en a-t-il ?

b) Soit f croissante (au sens large) de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $g(i) = f(i) + i - 1$ définit une application strictement croissante à valeurs dans $[\![1, n + k - 1]\!]$, et en déduire le nombre d'applications croissantes.

c) Application : $n = 5$, $k = 3$.

d) Interpréter c) comme un tirage de 3 boules avec remise parmi 5, sans tenir compte de l'ordre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Rectangles et carrés d'un échiquier

Sur un échiquier 8×8 :

a) Combien y a-t-il de rectangles (formés de cases entières, de côtés parallèles aux bords) ? (Un rectangle est déterminé par deux lignes verticales et deux lignes horizontales du quadrillage.)

b) Combien de carrés ?

c) Généraliser à un quadrillage $n \times n$.

Exercice 10 – Parties sans éléments consécutifs

On cherche le nombre $u(n, k)$ de parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

a) Pour $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_k\}$ sans consécutifs, montrer que $b_i = a_i - (i-1)$ définit une partie à k éléments de $[\![1, n-k+1]\!]$.

b) En déduire $u(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.

c) Application : au loto, on coche 3 numéros parmi 10. Combien de grilles ne contiennent aucun couple de numéros consécutifs ? Quelle proportion ?

Exercice 11 – Le principe des tiroirs

a) Montrer que parmi 13 personnes, deux au moins sont nées le même mois.

b) Montrer que si l'on place 5 points dans un carré de côté 2, deux d'entre eux sont à distance au plus $\sqrt{2}$.

c) Montrer que parmi $n+1$ entiers choisis dans $[\![1, 2n]\!]$, deux sont consécutifs (donc premiers entre eux).

d) Montrer que parmi $n+1$ entiers choisis dans $[\![1, 2n]\!]$, l'un divise un autre (écrire chaque entier $2^a m$ avec m impair).

Exercice 12 – Lemme des poignées de main

Dans un groupe, certaines paires de personnes se serrent la main. On note d_i le nombre de mains serrées par la personne i.

a) Montrer, par double comptage, que $\sum_i d_i = 2P$, où P est le nombre de poignées de main.

b) En déduire que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

c) Est-il possible que, dans un groupe de 7 personnes, chacune serre exactement 3 mains ?

d) Si chacune des n personnes serre la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées ?

Exercice 13 – Double comptage dans un réseau d'amitiés

Une classe compte 30 élèves ; chacun a exactement 4 amis dans la classe (l'amitié est réciproque).

a) Combien y a-t-il de paires d'amis ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Un « trio d'amis » est un ensemble de 3 élèves deux à deux amis. En comptant les couples (élève, paire de ses amis), montrer que le nombre de trios est au plus 60.

c) Dans une autre classe de n élèves, chacun a d amis. Montrer que nd est pair.

Exercice 14 – Autour d'une table ronde

n convives ($n \geq 3$) s'installent autour d'une table ronde ; deux placements qui se déduisent l'un de l'autre par une rotation sont considérés comme identiques.

a) Montrer qu'il y a $(n-1)!$ placements (fixer la place d'un convive).

b) Combien si l'on identifie aussi deux placements symétriques (on ne distingue plus la gauche de la droite) ?

c) 4 couples (8 personnes) : combien de placements (rotations identifiées) où chacun est à côté de son conjoint ?

Exercice 15 – Synthèse : une somme divisible par n

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers ($n \geq 1$).

a) On pose $S_0 = 0$ et $S_k = a_1 + \ldots + a_k$. Montrer que parmi $S_0, \ldots, S_n$, deux ont le même reste modulo n.

b) En déduire qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tels que n divise $a_{i+1} + \ldots + a_j$.

c) Application : $n = 5$, $(a_i) = (3, 8, 4, 7, 9)$. Trouver une telle somme.

d) Montrer que le résultat est faux si l'on n'a que $n-1$ entiers (donner un contre-exemple avec $n = 4$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).