Plaquette 4 – Surjections, partitions, permutations : dénombrements avancés

Dénombrement — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Les objets « avancés » (surjections, partitions d'un ensemble, permutations d'un type donné, relations) se comptent par trois méthodes complémentaires : la **formule du crible** (on compte les objets qui violent au moins une contrainte, avec signes alternés) ; les **relations de récurrence** obtenues en étudiant le sort d'un élément particulier (le dernier est-il seul dans son bloc ? est-il un point fixe ?) ; et les **bijections** qui ramènent à un dénombrement connu (une surjection est une partition ordonnée ; une permutation est une union disjointe de cycles). On vérifie toujours sur de petites valeurs.

Exercice 1 – Surjections sur un ensemble à 3 éléments

Soit E à n éléments et $F = \{a, b, c\}$.

a) On note A_a l'ensemble des applications de E dans F qui n'atteignent pas a ; de même A_b, A_c. Calculer $|A_a|$, $|A_a \cap A_b|$, $|A_a \cap A_b \cap A_c|$.

b) En déduire le nombre de surjections de E sur F : $3^n - 3 \times 2^n + 3$.

c) Calculer pour $n = 3$ et $n = 4$, et vérifier le cas $n = 3$ autrement.

d) Application : de combien de façons peut-on répartir 4 élèves dans 3 ateliers sans qu'aucun atelier ne soit vide ?

Exercice 2 – La formule générale des surjections

Soient E à n éléments et F à p éléments.

a) Démontrer par le crible que $s(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$.

b) Vérifier que $s(2, 3) = 0$ et $s(3, 3) = 6$.

c) Montrer que $s(n, 2) = 2^n - 2$ directement.

d) Montrer que $s(n+1, n) = \frac{n}{2}(n+1)!$ par un argument combinatoire, et vérifier pour $n = 2$.

Exercice 3 – Nombres de Stirling de seconde espèce

On note $S(n, k)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties non vides.

a) Montrer que $s(n, k) = k!\, S(n, k)$. En déduire $S(4, 2)$ et $S(4, 3)$.

b) En distinguant selon que l'élément n forme un bloc à lui seul ou non, démontrer $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

c) Dresser le tableau des $S(n, k)$ pour $n \leq 5$.

d) Montrer que $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ et $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Nombres de Bell

On note B_n le nombre total de partitions d'un ensemble à n éléments ($B_0 = 1$).

a) Calculer B_1, B_2, B_3, B_4 à l'aide du tableau des $S(n,k)$, et lister les partitions de $\{1,2,3\}$.

b) En classant les partitions de $\{1,\dots,n+1\}$ selon le bloc contenant $n+1$, montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

c) En déduire B_5.

d) Combien y a-t-il de relations d'équivalence sur un ensemble à 4 éléments ?

Exercice 5 – Récurrence des dérangements

Soit D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$ ($D_1 = 0$, $D_2 = 1$).

a) Soit σ un dérangement et $k = \sigma(n)$ ($k \neq n$). Distinguer les cas $\sigma(k) = n$ et $\sigma(k) \neq n$ pour montrer que $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

b) Calculer D_3, D_4, D_5.

c) Vérifier la cohérence avec la formule $D_n = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$.

d) Combien de permutations de $[\![1,5]\!]$ ont exactement 2 points fixes ?

Exercice 6 – Involutions

Une **involution** de $[\![1,n]\!]$ est une permutation σ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On note I_n leur nombre.

a) Montrer qu'une involution est un produit de transpositions à supports disjoints (chaque élément est fixe ou échangé avec un autre).

b) En étudiant $\sigma(n)$, montrer que $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$.

c) Calculer $I_1, \dots, I_5$.

d) Retrouver I_4 en comptant selon le nombre de transpositions.

Exercice 7 – Permutations d'un type de cycles donné

a) Montrer qu'il y a $(k-1)!$ cycles de longueur k sur un ensemble à k éléments.

b) Dénombrer les permutations de $[\![1,4]\!]$ selon leur décomposition en cycles : types $(1,1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, (4). Vérifier que le total vaut 24.

c) Combien de permutations de $[\![1,6]\!]$ sont produits de deux 3-cycles à supports disjoints ?

Exercice 8 – Relations binaires

Soit E un ensemble à n éléments. Une relation binaire sur E est une partie de $E \times E$.

a) Combien y a-t-il de relations binaires ?

b) Combien sont réflexives ? symétriques ? réflexives et symétriques ?

c) Combien sont antisymétriques ? (Pour chaque paire $\{x,y\}$ avec $x \neq y$, compter les possibilités.)

d) Application numérique pour $n = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Boules et boîtes : le tableau à quatre cases

On range $n = 4$ boules dans $k = 2$ boîtes. Compter les rangements dans chacun des cas :

a) boules distinctes, boîtes distinctes ; puis avec aucune boîte vide ;

b) boules identiques, boîtes distinctes ; puis avec aucune boîte vide ;

c) boules distinctes, boîtes identiques (on ne distingue pas les boîtes) ; puis avec aucune boîte vide ;

d) donner les formules générales pour les cas « aucune boîte vide ».

Exercice 10 – Applications idempotentes

Une application $f : E \to E$ est **idempotente** si $f \circ f = f$ ($\mathrm{card} E = n$).

a) Montrer que f est idempotente si et seulement si f vaut l'identité sur son image.

b) En déduire que le nombre d'applications idempotentes d'image un ensemble à k éléments fixé est k^{n-k}.

c) Conclure que le nombre total est $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$, et calculer pour $n = 3$.

Exercice 11 – Anagrammes sans lettres voisines identiques

On considère les anagrammes du mot $AABBCC$.

a) Combien y en a-t-il ?

b) Combien contiennent le bloc AA ? les blocs AA et BB ? les trois blocs ?

c) En déduire, par le crible, le nombre d'anagrammes où deux lettres identiques ne sont jamais voisines.

Exercice 12 – Mots binaires sans deux 1 consécutifs

Soit a_n le nombre de mots de longueur n sur $\{0, 1\}$ ne contenant pas deux 1 consécutifs ($a_0 = 1$).

a) Calculer a_1, a_2, a_3.

b) En distinguant selon la dernière lettre, montrer que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

c) En déduire a_5 et relier a_n à la suite de Fibonacci.

d) Retrouver a_5 en comptant selon le nombre k de 1 (utiliser les parties sans éléments consécutifs).

Exercice 13 – Pavages d'une bande par des dominos

On pave une bande de $2 \times n$ cases par des dominos 1×2 (horizontaux ou verticaux). On note t_n le nombre de pavages.

a) Calculer t_1, t_2, t_3 en dessinant les pavages.

b) En regardant la colonne de gauche, montrer que $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$.

c) En déduire t_{10}.

d) Construire une bijection avec les mots de l'exercice précédent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Formule du crible générale

Soient $A_1, \dots, A_p$ des parties finies d'un ensemble E.

a) Pour $x \in A_1 \cup \dots \cup A_p$ appartenant à exactement $m \geq 1$ des A_i, montrer que x est compté $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k}$ fois dans le membre de droite de la formule du crible.

b) Montrer que cette somme vaut 1, et conclure que la formule du crible est vraie.

c) Application : parmi les entiers de 1 à 210, combien ne sont divisibles par aucun des nombres $2, 3, 5, 7$?

Exercice 15 – Synthèse : combien de surjections, par trois méthodes

On veut calculer $s(5,3)$, le nombre de surjections d'un ensemble à 5 éléments sur un ensemble à 3 éléments.

a) Par la formule du crible.

b) Par les nombres de Stirling : calculer $S(5,3)$ par la récurrence, puis $s(5,3) = 3!\,S(5,3)$.

c) Directement, en classant selon les effectifs des antécédents : $(3,1,1)$ ou $(2,2,1)$ à l'ordre près.

d) Application : 5 tâches distinctes sont confiées à 3 employés, chacun en recevant au moins une. Quelle proportion des répartitions quelconques cela représente-t-il ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).