Plaquette 2 – Dérivées successives, formule de Leibniz, classe C^n

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule de Leibniz : si f et g sont n fois dérivables,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

- $\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$; $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; $(x^p)^{(n)} = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n}$ si $n \le p$, 0 sinon.
- **Limite de la dérivée** : f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$, $f'(x) \to \ell$ en $a \Rightarrow f'(a) = \ell$ (et f' continue en a).
- C^n : n fois dérivable, $f^{(n)}$ continue ; les C^n sont stables par somme, produit, composée, quotient.

Correction de l'exercice 1 – Leibniz avec un facteur polynomial

a) Les dérivées de x^2 s'annulent au-delà de l'ordre 2 :

$$\left(x^2 \mathrm{e}^x\right)^{(n)} = x^2 \mathrm{e}^x + 2nx\,\mathrm{e}^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$$

b) En 0, seul le terme $k=3$ survit : $\binom{n}{3} \cdot 6 \cdot (-1)^{n-3}$, soit $(-1)^{n-3} n(n-1)(n-2)$ pour $n \ge 3$, et 0 pour $n \le 2$.

c) $\sin^{(k)} x = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$:

$$(x^2+1)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + 2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

d) $n=1$: $(2x+x^2)\mathrm{e}^x$ ✓ (x^2+2x+0). $n=2$: $(2+4x+x^2)\mathrm{e}^x$ ✓ (x^2+4x+2).

Réponse. $\left(x^2\mathrm{e}^x\right)^{(n)} = \mathrm{e}^x\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Décomposer pour dériver n fois

a) $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$, donc

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)$$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$, d'où $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$ et, en 0 :

$$f^{(n)}(0) = n!\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

c) $n=0$: $\frac{1}{2} = f(0)$ ✓. $n=1$: $f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$, $f'(0) = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ ✓.

d) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\frac{1}{x-\mathrm{i}}$, d'où la dérivée n-ième $(-1)^n n! \mathrm{Im}\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f^{(n)}(0) = n!\left(1 - 2^{-n-1}\right)$ pour $f = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Correction de l'exercice 3 – La fonction plate exp(−1/x²)

a) $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}$: $P_1(X) = 2X^3$. Si $f^{(n)} = P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$, en dérivant :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}, \quad P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P_n'$$

— $P_2 = 4X^6 - 6X^4$.

b) Avec $X = \dfrac{1}{|x|} \to +\infty$: $X^k\mathrm{e}^{-X^2} \to 0$ (croissances comparées), et P est combinaison de tels termes.

c) Récurrence : si $f^{(n)}$ est continue avec $f^{(n)}(0) = 0$, le taux $\dfrac{f^{(n)}(x)}{x} = XP_n(X)\mathrm{e}^{-X^2}$ (au signe près) tend vers 0 : $f^{(n+1)}(0) = 0$, et $f^{(n+1)}(x) \to 0$ par b) : continuité.

d) Toutes ses dérivées sont nulles en 0, mais f n'est pas nulle : une fonction C^∞ n'est pas déterminée par ses dérivées en un point (pas de développement en série entière).

Réponse. f est C^∞, $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, sans être nulle.

Correction de l'exercice 4 – Théorème de la limite de la dérivée

a) Pour $x \in]a, b]$, il existe $c_x \in]a, x[$ avec

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

— car $c_x \to a$.

b) Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Or $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{\cos x - 1}{x} + \dfrac{x - \sin x}{x^2}$, et les deux termes tendent vers 0 ($1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{6}$) : $f'(x) \to 0$. Donc $f'(0) = 0$ et f' est continue.

c) $g'(x) = 2x\ln|x| + x \to 0$: $g'(0) = 0$ et g est C^1. Mais $\dfrac{g'(x) - g'(0)}{x} = 2\ln|x| + 1 \to -\infty$: pas de dérivée seconde en 0.

d) Non : $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ est dérivable en 0 alors que f' n'a pas de limite. Le théorème est une condition **suffisante**.

Réponse. $f' \to \ell \Rightarrow f'(a) = \ell$; $\dfrac{\sin x}{x}$ est C^1 ; $x^2\ln|x|$ est C^1 non D^2.

Correction de l'exercice 5 – Dérivées n-ièmes par récurrence

a) Récurrence : vrai pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang n,

$$(x^n\ln x)^{(n+1)} = \left(nx^{n-1}\ln x + x^{n-1}\right)^{(n)} = n\cdot\frac{(n-1)!}{x} + 0 = \frac{n!}{x}$$

— car x^{n-1} est de degré $< n$.

b) $(\mathrm{e}^x\sin(x+\varphi))' = \mathrm{e}^x(\sin(x+\varphi) + \cos(x+\varphi)) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^x\sin\left(x + \varphi + \frac{\pi}{4}\right)$: chaque dérivation multiplie par $\sqrt{2}$ et déphase de $\frac{\pi}{4}$.

c) $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, d'où

$$\left(\cos^3 x\right)^{(n)} = \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

d) $(x^2\ln x)' = 2x\ln x + x$, $(\cdot)'' = 2\ln x + 3$, $(\cdot)''' = \frac{2}{x} = \frac{2!}{x}$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$; $(\mathrm{e}^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 6 – Une identité combinatoire par Leibniz

a) $\left(x^{2n}\right)^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!}x^n$.

b) $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\cdot\frac{n!}{k!}x^k = n!\,x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

c) En identifiant : $n!\sum\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{n!}$, soit $\sum\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

d) $1+9+9+1 = 20 = \binom{6}{3}$ ✓.

Réponse. $\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Correction de l'exercice 7 – Dérivées successives de arctan en 0

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) Seuls trois termes survivent ($(1+x^2)''' = 0$) :

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

c) En $x=0$: $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$. Avec $f(0)=0$: $f^{(2k)}(0) = 0$. Avec $f'(0)=1$: $f''(0) = -2$, $f^{(5)}(0) = 24$, et par récurrence

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$$

d) Les coefficients de Taylor $\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^k}{2k+1}$: 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ ✓.

Réponse. $\arctan^{(2k)}(0) = 0$, $\arctan^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$.

Correction de l'exercice 8 – Polynômes d'Hermite

a) Récurrence : $\left((-1)^n H_n \mathrm{e}^{-x^2}\right)' = (-1)^n(H_n' - 2xH_n)\mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^{n+1}(2xH_n - H_n')\mathrm{e}^{-x^2}$.

b) $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$,

$$H_3 = 2x(4x^2-2) - 8x = 8x^3 - 12x$$

c) Si H_n a pour terme dominant $2^n x^n$, $2xH_n$ a pour terme dominant $2^{n+1}x^{n+1}$ et H_n' est de degré $n-1$. Parité : xH_n et H_n' ont la parité de $n+1$.

d) $g' = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $g'' = (-2+4x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ ✓ ($= (+1)H_2\mathrm{e}^{-x^2}$).

Réponse. $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$; $H_3 = 8x^3 - 12x$.

Correction de l'exercice 9 – Classe d'une fonction $|x|^k$

a) $x|x|$ vaut x^2 ou $-x^2$; dérivée $2|x|$ (vérifiée en 0 par le taux $|h| \to 0$), continue. Mais $2|x|$ n'est pas dérivable en 0.

b) $(|x|^3)' = 3x|x|$, $(|x|^3)'' = 6|x|$, continue mais non dérivable en 0 : C^2 exactement.

c) $x^n|x|$ est C^n et pas $n+1$ fois dérivable en 0 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(x^n|x|)^{(n)} = (n+1)!\,|x|$$

d) Une primitive de $x \mapsto \operatorname{dist}(x,\mathbb{Z})$ (fonction « en dents de scie » continue, non dérivable aux entiers), par exemple $F(x) = \int_0^x \operatorname{dist}(t,\mathbb{Z})\,\mathrm{d}t$.

Réponse. $x^n|x|$ est C^n et non D^{n+1} en 0.

Correction de l'exercice 10 – Raccords réguliers (smoothstep)

a) Conditions $P(0)=0$, $P'(0)=0$, $P(1)=1$, $P'(1)=0$: $P = ax^3+bx^2$ avec $a+b=1$, $3a+2b=0$:

$$P(x) = 3x^2 - 2x^3$$

b) $P''(0) = 6 \neq 0$ alors que la dérivée seconde vaut 0 à gauche : pas C^2.

c) $Q(0)=Q'(0)=Q''(0)=0$ (facteur x^3) ; $Q(1)=1$, $Q'(1)=30-60+30=0$, $Q''(1)=120-180+60=0$ ✓.

d) Un polynôme dont toutes les dérivées sont nulles en 0 est nul, ce qui contredit $P(1)=1$. On utilise $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-1/x}$ $(x>0)$: $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(1-x)}$ est un raccord C^∞.

Réponse. $P = 3x^2-2x^3$ (C^1) ; $6x^5-15x^4+10x^3$ (C^2) ; C^∞ impossible avec un polynôme.

Correction de l'exercice 11 – Dérivées successives d'une composée

a) $(g\circ f)' = f'\cdot g'\circ f$; on dérive le produit : $f''\cdot g'\circ f + f'\cdot f'\cdot g''\circ f$.

b) En dérivant encore :

$$(g\circ f)''' = f'''\cdot g'\circ f + 3ff'\cdot g''\circ f + f'^3\cdot g'''\circ f$$

c) $f=\sin$, $g=\exp$; en 0 : $f=1$, $f'=0$, $f''=-1$ et $g^{(k)}(0)=1$. Dérivées : 1, $0+1=1$, $-1+0+1=0$.

d) Taylor : $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{0}{6}x^3$. En 0,1 : $\mathrm{e}^{\sin 0{,}1} \approx 1{,}104987$ contre 1,105 ; l'écart $\approx -1{,}3\cdot 10^{-5}$ est bien d'ordre x^4 (le terme suivant est $-\frac{x^4}{8}$).

Réponse. $(g\circ f)''' = f''g'(f) + 3ff'g''(f) + f'^3 g'''(f)$; $\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Correction de l'exercice 12 – Produit de fonctions de classe C^n

a) Chaque terme $\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ est continu : $(fg)^{(n)}$ est continue.

b) Pour $n=0$ c'est clair. Si le résultat vaut au rang n et f est C^{n+1} : $\frac{1}{f}$ est C^n, et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -f'\cdot\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f}$ est produit de fonctions C^n, donc C^n : $\frac{1}{f}$ est C^{n+1}.

c) $\tan = \sin\cdot\frac{1}{\cos}$ avec $\cos \neq 0$: C^∞. $\tan' = \dfrac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = 1+\tan^2$.

d) $P_1 = 1+X^2$ et $P_{n+1} = P_n'\cdot(1+X^2)$:

$$P_2 = 2X(1+X^2) = 2X+2X^3, \qquad P_3 = (2+6X^2)(1+X^2) = 2+8X^2+6X^4$$

Réponse. $\tan' = 1+\tan^2$, $\tan'' = 2\tan + 2\tan^3$, $\tan''' = 2+8\tan^2+6\tan^4$.

Correction de l'exercice 13 – Nombre de zéros d'une dérivée n-ième

a) $\deg P = 2n$, donc $\deg L_n = n$. $L_1 = 2x$; $L_2 = \left(x^4-2x^2+1\right)'' = 12x^2-4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) ± 1 est racine d'ordre n de P : les dérivées d'ordre $< n$ s'y annulent.

c) $P(-1) = P(1) = 0$: Rolle donne un zéro de P' dans $]-1,1[$. Si $P^{(k)}$ ($k < n$) s'annule en $-1 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} = 1$, Rolle sur chacun des $k+1$ intervalles fournit

$$k+1 \text{ zéros distincts de } P^{(k+1)} \text{ dans }]-1,1[$$

d) L_n a au moins n zéros distincts dans $]-1,1[$ et est de degré n : exactement n, simples. $L_2 = 4(3x^2-1)$: racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577$ ✓.

Réponse. L_n a n racines simples dans $]-1,1[$; $L_2 = 12x^2 - 4$, racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 14 – Dérivées d'une réciproque

a) $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, continue comme composée et inverse de fonctions continues.

b) $f' \circ f^{-1}$ est C^1 (composée) : $(f^{-1})'$ l'est aussi, et

$$(f^{-1})'' = -\frac{(f' \circ f^{-1})'}{(f' \circ f^{-1})^2} = -\frac{f'' \circ f^{-1} \cdot (f^{-1})'}{(f' \circ f^{-1})^2} = -\frac{f'' \circ f^{-1}}{(f' \circ f^{-1})^3}$$

c) $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$, $f''(1) = 6$: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$ et $(f^{-1})''(2) = -\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$.

d) $\frac{1{,}0024953 - 0{,}9974953}{0{,}02} = 0{,}25$ ✓ ; $\frac{1{,}0024953 - 2 + 0{,}9974953}{0{,}0001} \approx -0{,}094 \approx -\frac{3}{32}$ ✓.

Réponse. $(f^{-1})'' = -\frac{f''(f^{-1})}{f'(f^{-1})^3}$; pour $x^3 + x$ en 2 : $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{32}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une équation différentielle et ses dérivées

a) $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$; en multipliant par $1-x^2$: $1 + xy$.

b) Dérivée n-ième de $(1-x^2)y'$: $(1-x^2)y^{(n+1)} - 2nxy^{(n)} - n(n-1)y^{(n-1)}$; de xy : $xy^{(n)} + ny^{(n-1)}$. La différence est nulle ($n \geq 1$) :

$$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2 y^{(n-1)} = 0$$

c) En 0 : $y^{(n+1)}(0) = n^2 y^{(n-1)}(0)$. $y(0) = 0$ donc $y^{(2k)}(0) = 0$; $y'(0) = 1$ donc $y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 2^2 = 4^k (k!)^2$.

d) $y \approx \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \approx x + \frac{2x^3}{3}$: $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4 = 4^1 (1!)^2$ ✓.

Réponse. $y^{(2k+1)}(0) = 4^k (k!)^2$, $y^{(2k)}(0) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).