Plaquette 4 – Études de fonctions et optimisation

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Condition nécessaire d'extremum en un point intérieur c où f est dérivable :

$$f \text{ a un extremum local en } c \implies f'(c) = 0$$

- La réciproque est fausse (x^3 en 0) ; un **changement de signe** de f' en c donne un extremum.
- Sur un **segment**, le maximum est atteint : le comparer aux valeurs aux bornes et aux points critiques.
- **Tangente** en a : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- **Réciproque** : $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Correction de l'exercice 1 – La boîte sans couvercle

a) $V(x) = x(30 - 2x)^2$ pour $x \in [0, 15]$.

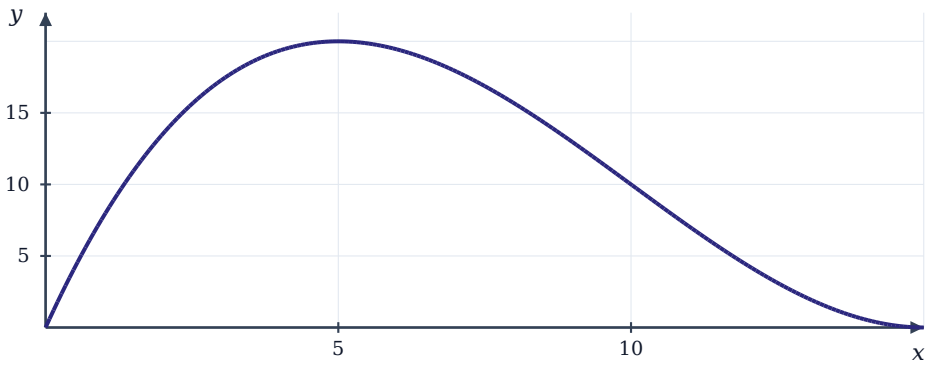
b) $V'(x) = (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$: positive sur $[0, 5]$, négative sur $[5, 15]$.

c)

$$V(5) = 5 \times 20^2 = 2000 \text{ cm}^3 = 2 \text{ L}$$

d) $V' = (a - 2x)(a - 6x)$: maximum en $\frac{a}{6}$, $V = \frac{a}{6}\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{2a^3}{27}$ (pour $a = 30$: 2000 ✓).

Réponse. $x = 5$ cm, $V_{\max} = 2000$ cm³ ; en général $x = \frac{a}{6}$.



V(x) en centaines de cm³

Correction de l'exercice 2 – La canette optimale

a) $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, d'où $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ pour $r > 0$.

b) $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$, qui s'annule pour $r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$, négative avant, positive après. Alors

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $r = \left(\frac{330}{2\pi}\right)^{1/3} \approx 3{,}74$ cm, $h \approx 7{,}49$ cm, $S \approx 264$ cm².

d) $S(3{,}25) \approx 2\pi \cdot 3{,}25^2 + \frac{660}{3{,}25} \approx 66{,}4 + 203{,}1 \approx 269{,}5$ cm² : seulement 2 % de plus. Les contraintes réelles (épaisseur du fond, prise en main, empilement) l'emportent.

Réponse. $h = 2r$, $r \approx 3{,}74$ cm, $S_{\min} \approx 264$ cm².

Correction de l'exercice 3 – Loi de Snell-Descartes

a) $T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$.

b) $T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2}$.

c) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ a pour dérivée $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} > 0$: T' est somme de deux fonctions strictement croissantes. $T'(0) < 0 < T'(d)$: un unique zéro, minimum de T, où

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

— (avec $n = \frac{c}{v}$: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$).

d) $\sin i_1 = \sin i_2$: $i_1 = i_2$, les points A, M, B sont alignés.

Réponse. Le temps est minimal quand $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$ (loi de Snell-Descartes).

Correction de l'exercice 4 – Éclairement d'une table

a) $r = \sqrt{h^2 + a^2}$ et $\cos\theta = \frac{h}{r}$.

b) $E'(h) = k\frac{(h^2 + a^2)^{3/2} - 3h^2(h^2 + a^2)^{1/2}}{(h^2 + a^2)^3} = k\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{5/2}}$: croissante puis décroissante.

c)

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71 \text{ m}$$

d) $E_{\max} = \frac{a/\sqrt{2}}{(3a^2/2)^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$ pour $a = 1$. En 0, la lumière arrive rasante ($\cos\theta \to 0$) ; en $+\infty$, la lampe est trop loin : $E \to 0$ dans les deux cas.

Réponse. Hauteur optimale $\frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ m.

Correction de l'exercice 5 – Distance d'un point à une parabole

a) $g(x) = x^2 + (x^2 - 2)^2 = x^4 - 3x^2 + 4$.

b) $g'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$: minimum en $x = \pm\sqrt{3/2}$ (maximum local en 0) :

$$g_{\min} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}, \qquad d_{\min} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}32$$

— (contre 2 au sommet).

c) En $M = \left(\sqrt{3/2}, \frac{3}{2}\right)$: $\overrightarrow{AM} = \left(\sqrt{3/2}, -\frac{1}{2}\right)$ et la tangente a pour vecteur directeur $(1, 2\sqrt{3/2})$: produit scalaire $\sqrt{3/2} - \sqrt{3/2} = 0$ ✓.

d) $g = x^4 + (1 - 2c)x^2 + c^2$: si $c \le \frac{1}{2}$, le sommet est le plus proche ; si $c > \frac{1}{2}$, ce sont les points d'abscisse $\pm\sqrt{c - \frac{1}{2}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Points $\left(\pm\sqrt{3/2}, \frac{3}{2}\right)$, distance $\frac{\sqrt{7}}{2}$; seuil $c = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Nombre de solutions de $e^x = ax$

a) $e^0 = 1 \neq 0$.

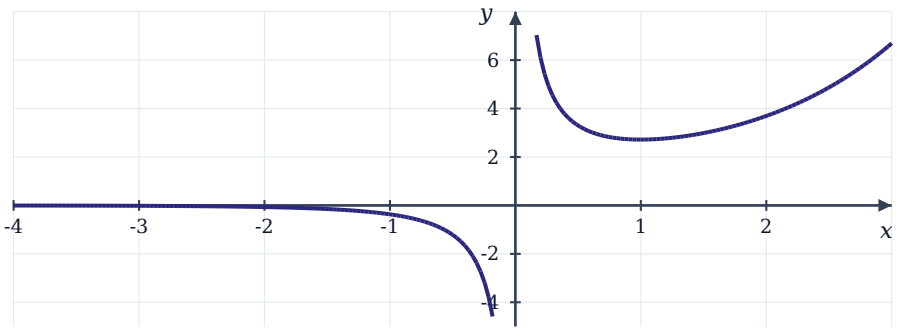
b) $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. Sur $]-\infty, 0[$: décroissante de 0^- à $-\infty$. Sur $]0, 1]$: décroissante de $+\infty$ à e ; sur $[1, +\infty[$: croissante de e à $+\infty$.

c)

$$a < 0 : 1 \text{ solution}; \quad 0 \leq a < e : 0; \quad a = e : 1; \quad a > e : 2$$

d) La tangente en 1 est $y = e + e(x-1) = ex$: elle passe par l'origine, point de contact $(1, e)$.

Réponse. 1 solution si $a < 0$ ou $a = e$; 0 si $0 \leq a < e$; 2 si $a > e$.



La courbe de $g(x) = e^x/x$

Correction de l'exercice 7 – Moyenne et médiane comme minimiseurs

a) $F'(x) = 2\sum(x - a_i) = 2(nx - \sum a_i)$, nulle en $\overline{a}$, F convexe (parabole) : minimum.

b) Hors des a_i :

$$G'(x) = \text{Card}\{i : a_i < x\} - \text{Card}\{i : a_i > x\}$$

c) G est continue, affine par morceaux ; $G' < 0$ tant que moins de la moitié des a_i sont à gauche, $G' > 0$ ensuite. Pour $n = 2m + 1$: G décroît jusqu'à a_{m+1} puis croît.

d) Moyenne 23,2, médiane 3. La moyenne est tirée par la valeur 100 ; la médiane ne bouge pas si l'on remplace 100 par 10^6.

Réponse. $\sum(x - a_i)^2$ minimale à la moyenne, $\sum|x - a_i|$ à la médiane.

Correction de l'exercice 8 – La fenêtre normande

a) $P = w + 2h + \frac{\pi w}{2}$, d'où $h = \frac{P - w - \pi w/2}{2}$ et

$$A(w) = wh + \frac{\pi w^2}{8} = \frac{Pw}{2} - \frac{w^2}{2} - \frac{\pi w^2}{8}$$

b) $A'(w) = \frac{P}{2} - w\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$: $w = \frac{2P}{4+\pi} = \frac{12}{4+\pi} \approx 1{,}68$ m (maximum : parabole tournée vers le bas).

c) $2h = P - w\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = w\left(\frac{4+\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{2}\right) = w$.

d) $A_{\max} = \frac{P^2}{2(4+\pi)} = \frac{36}{2(4+\pi)} \approx 2{,}52$ m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $w = \frac{12}{4+\pi} \approx 1{,}68$ m, $h = \frac{w}{2}$, $A_{\max} \approx 2{,}52$ m².

Correction de l'exercice 9 – Inégalités classiques par étude de fonction

a) $h = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$: $h' = \mathrm{e}^x - 1 - x \geq 0$, $h(0) = 0$: $h \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x < 0$, h croissante et $h(0) = 0$: $h < 0$, l'inégalité s'inverse.

b) $\sin x \leq x$: $(x - \sin x)' = 1 - \cos x \geq 0$. Puis $k = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$: $k' = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$ par c).

c) Par parité, on se limite à $x \geq 0$. $u = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$: $u' = x - \sin x \geq 0$, $u(0) = 0$. Puis $v = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$: $v' = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x \geq 0$ par b).

d)

$$0{,}995 \leq \cos 0{,}1 \leq 0{,}995 + \frac{10^{-4}}{24} \approx 0{,}9950042$$

— donc $\cos 0{,}1 \approx 0{,}99500$ à $5 \cdot 10^{-6}$ près (valeur : 0,9950042).

Réponse. Encadrements de Taylor par intégrations successives ; $\cos 0{,}1 \approx 0{,}99500$.

Correction de l'exercice 10 – Tangentes passant par un point

a) Tangente en a : $y = \mathrm{e}^a(x - a + 1)$; elle passe par O si $1 - a = 0$: une seule, $y = \mathrm{e}x$.

b) Tangente en a : $y = 2ax - a^2$; par $(0, -1)$: $a^2 = 1$: $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

c) $q = 2ap - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2pa + q = 0$, de discriminant réduit $p^2 - q$:

$$q < p^2 : 2 \text{ tangentes}; \quad q = p^2 : 1; \quad q > p^2 : 0$$

— deux tangentes depuis un point « sous » la parabole, aucune depuis l'intérieur.

d) Tangente en a : $y = 3a^2x - 2a^3$; par $(1, 0)$: $3a^2 - 2a^3 = a^2(3 - 2a) = 0$: $a = 0$ ($y = 0$) ou $a = \frac{3}{2}$ ($y = \frac{27}{4}x - \frac{27}{4}$).

Réponse. $y = \mathrm{e}x$; $y = \pm 2x - 1$; pour x^3 par $(1, 0)$: $y = 0$ et $y = \frac{27}{4}(x - 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Dérivée logarithmique

a) $\ln|P| = \sum \ln|x - k|$, que l'on dérive : $\frac{P'}{P} = \sum \frac{1}{x - k}$.

b) $P(0) = (-1)^n n!$ et $\frac{P'(0)}{P(0)} = -H_n$:

$$P'(0) = (-1)^{n+1} n!\, H_n$$

c) $\left(\frac{P'}{P}\right)' = -\sum \frac{1}{(x-k)^2} < 0$ et $\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P - P'^2}{P^2}$, d'où $P'^2 - PP'' > 0$.

d) Sur $]k, k+1[$, $\frac{P'}{P}$ est strictement décroissante, de $+\infty$ à $-\infty$: un unique zéro, qui est l'unique racine de P' dans cet intervalle.

Réponse. $P'(0) = (-1)^{n+1} n! H_n$; une racine de P' exactement entre deux racines de P.

Correction de l'exercice 12 – Étude de arctan x − x/(1 + x²)

a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$: strictement croissante.

b) Impaire ; $f(x) \to \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $f(0)=0$ et f croissante : $f\geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) L'Hôpital : $\dfrac{f'(x)}{3x^2}=\dfrac{2}{3(1+x^2)^2}\to\dfrac{2}{3}$, donc

$$\frac{f(x)}{x^3}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\frac{2}{3}$$

Réponse. $f'=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}$; f croissante, impaire, $f(x)\sim\dfrac{2x^3}{3}$ en 0.

Correction de l'exercice 13 – Méthode de Newton pour la racine cubique

a) $u_{n+1}=u_n-\dfrac{u_n^3-2}{3u_n^2}=\dfrac{2u_n}{3}+\dfrac{2}{3u_n^2}$.

b) $u_1=\dfrac{4}{3}\approx 1{,}3333$, $u_2\approx 1{,}263889$, $u_3\approx 1{,}259933$, $u_4\approx 1{,}2599210500$; erreurs $7\cdot 10^{-2}$, $4\cdot 10^{-3}$, $1{,}2\cdot 10^{-5}$, $1{,}2\cdot 10^{-10}$.

c) $g'(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3x^3}$, nul en $x=\sqrt[3]{2}$ où g atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$g(x)\geq g\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{2}$$

d) Quatre à cinq itérations de Newton contre 40 de dichotomie : l'erreur est élevée au carré à chaque pas (convergence quadratique).

Réponse. $u_4\approx 1{,}25992105$ (erreur 10^{-10}) : convergence quadratique.

Correction de l'exercice 14 – Extremums d'une fonction périodique

a) Théorème des bornes sur $[0,T]$; par périodicité, ces valeurs sont les bornes globales.

b) Aux points de maximum et de minimum (distincts modulo T car f n'est pas constante), qui sont intérieurs à $\mathbb{R}$, f' s'annule.

c) $f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{3},\pi,\dfrac{5\pi}{3}\right\}$ et

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}299$$

d) Si $f'\geq 0$ sur toute une période, f serait croissante et $f(x+T)=f(x)$ imposerait f constante sur la période : exclu.

Réponse. f' s'annule au moins deux fois par période ; $\max\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Correction de l'exercice 15 – Dérivées des réciproques usuelles

a) $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$ et $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ (positif car $\arcsin x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$).

b) $\operatorname{argsh}'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}x)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ car $\operatorname{ch}^2=1+\operatorname{sh}^2$ et $\operatorname{ch}>0$.

c) $\sin'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$: le taux de arcsin en 1 tend vers $+\infty$, tangente **verticale** (symétrique de la tangente horizontale de sin).

d) $f'=1+\dfrac{1}{x}>0$, limites $-\infty$ et $+\infty$: bijection. $f(1)=1$ et $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}+1$:

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2},\qquad (f^{-1})'(1+\mathrm{e})=\frac{1}{1+1/\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$$

Réponse. $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{2}$, $(f^{-1})'(1+\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).