Plaquette 3 – Rolle et accroissements finis : applications

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Égalité des accroissements finis : f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$:

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

— **Rolle itéré** : si f est n fois dérivable et a $n+1$ zéros (comptés distinctement) sur $[a,b]$, $f^{(n)}$ s'annule sur $]a,b[$.

— **Darboux** : une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (même discontinue).

— **Monotonie stricte** : $f' \geq 0$ et f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial $\Rightarrow f$ strictement croissante.

— **Méthode de Newton** : $u_{n+1}=u_n-\dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Correction de l'exercice 1 – Rolle à l'infini

a) Soit $y=\dfrac{f(x_0)+\ell}{2} \in]\ell, f(x_0)[$. En $-\infty$, $f<y$ pour x assez petit : le TVI sur $[x_1,x_0]$ donne $a<x_0$ avec $f(a)=y$. De même $b>x_0$ avec $f(b)=y$.

b) Rolle sur $[a,b]$: $f'(c)=0$ pour un $c \in]a,b[$.

c) Limites 0 en $\pm\infty$:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

d) Limites $+\infty$ des deux côtés : oui (même argument avec un y plus grand que $f(0)$, ou bien f atteint un minimum). Limites différentes : non (arctan, dérivée >0).

Réponse. Même limite finie en $\pm\infty \Rightarrow f'$ s'annule ; ici en ± 1.

Correction de l'exercice 2 – Polynômes scindés et dérivée

a) $P=(X-a_i)^{m_i}Q$ avec $Q(a_i)\neq 0$: $P'=(X-a_i)^{m_i-1}(m_iQ+(X-a_i)Q')$.

b) Rolle sur $[a_i,a_{i+1}]$: $p-1$ nouvelles racines.

c) Total :

$$\sum_{i=1}^{p}(m_i-1)+(p-1)=n-p+p-1=n-1=\deg P'$$

— donc toutes les racines de P' sont réelles : P' est scindé.

d) $x^4-6x^2+5=(x^2-1)(x^2-5)$: racines ± 1, $\pm\sqrt{5}$. $P'=4x^3-12x=4x(x^2-3)$: racines $-\sqrt{3} \in]-\sqrt{5},-1[$, $0 \in]-1,1[$, $\sqrt{3} \in]1,\sqrt{5}[$ ✓.

Réponse. P scindé sur $\mathbb{R} \Rightarrow P'$ scindé, racines intercalées.

Correction de l'exercice 3 – Théorème de Darboux

a) f est continue (dérivable) sur le segment : théorème des bornes.

b) Le taux tend vers $f'(a)<0$: pour x proche de a, $x>a$, $f(x)<f(a)$; a n'est pas le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

minimum. Symétriquement à droite, $f(x) < f(b)$ pour $x < b$ proche de b (car $f'(b) > 0$).

c) Le minimum est intérieur : $f'(c) = 0$. Pour y entre $f'(a)$ et $f'(b)$, appliquer ce qui précède à

$$g(x) = f(x) - yx, \qquad g'(a) < 0 < g'(b)$$

d) signe prend les valeurs -1 et 1 mais pas $\frac{1}{2}$ sur $[-1, 1]$: elle ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

Réponse. Une dérivée vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires (Darboux).

Correction de l'exercice 4 – Encadrement de ln et constante d'Euler

a) $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$ pour un $c \in]n, n+1[$, et $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$.

b) En sommant l'inégalité de droite ($\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$) de 1 à n : $H_n \geq \ln(n+1)$. En sommant celle de gauche de 1 à $n-1$: $H_n - 1 \leq \ln n$.

c)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0$$

— et $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n > 0$: décroissante minorée, convergente.

d) $u_{1000} = 7{,}48547 - \ln 1000 \approx 7{,}48547 - 6{,}90776 = 0{,}57772$; $\gamma \approx 0{,}5772$ (l'écart est de l'ordre de $\frac{1}{2n}$).

Réponse. $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, $\gamma \approx 0{,}5772$.

Correction de l'exercice 5 – Limites par les accroissements finis

a) $\arctan(x+1) - \arctan x = \frac{1}{1+c_x^2}$ avec $c_x \in]x, x+1[$:

$$\frac{x^2}{1+(x+1)^2} \leq x^2(\arctan(x+1) - \arctan x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$$

— les deux bornes tendent vers 1.

b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3c_x^{2/3}}$ avec $c_x \in]x, x+1[$, et $\frac{x^{2/3}}{3c_x^{2/3}} \to \frac{1}{3}$.

c) $f(x+1) - f(x) = f'(c_x) \to \ell$. Pour $\frac{f(x)}{x}$: accroissements finis sur $[A, x]$ avec $|f' - \ell| \leq \varepsilon$ au-delà de A : $|f(x) - f(A) - \ell(x-A)| \leq \varepsilon(x-A)$, puis on divise par x.

d) 0,99000 ✓ (l'erreur est d'ordre $\frac{1}{x}$).

Réponse. a) 1 ; b) $\frac{1}{3}$; c) $f' \to \ell \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \to \ell$.

Correction de l'exercice 6 – Dérivée bornée et lipschitzianité

a) Accroissements finis : $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq k|x - y|$.

b) $\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq k$; passage à la limite.

c) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et

$$|2x| \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$$

— donc $|f'| \leq 1$.

d) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to +\infty$ en 0^+.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $|f'| \le k \Leftrightarrow f$ k-lipschitzienne (pour f dérivable) ; $\ln(1+x^2)$ est 1-lipschitzienne.

Correction de l'exercice 7 – Nombre de racines par Rolle

a) Si f avait $k+2$ zéros, Rolle donnerait $k+1$ zéros distincts de f'.

b) $f'' = n(n-1)x^{n-2}$ ne s'annule qu'en 0 : f' a au plus 2 zéros, f au plus 3. Si n est pair, $f' = nx^{n-1} + a$ est strictement croissante ($n-1$ impair) : au plus un zéro, donc f au plus 2.

c) $g(x) = \mathrm{e}^x - ax^2 - bx - c$: $g''' = \mathrm{e}^x > 0$ ne s'annule jamais, donc g'' a au plus 1 zéro, g' au plus 2, g au plus 3.

d) $h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x \ge 0$ avec égalité seulement en 0 :

$$h \text{ strictement croissante}, \quad h(0) = 0$$

— unique solution $x = 0$.

Réponse. $x^n + ax + b$: au plus 3 racines (2 si n pair) ; e^x = trinôme : au plus 3 solutions.

Correction de l'exercice 8 – Erreur d'interpolation linéaire

a) $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et $\varphi(x) = 0$: trois zéros.

b) Rolle deux fois : φ' a deux zéros, φ'' un zéro ξ. Or $\varphi'' = f'' - 2K$: $K = \frac{f''(\xi)}{2}$, et $\varphi(x) = 0$ donne la formule.

c) $|(x-a)(x-b)|$ est maximal au milieu, où il vaut $\frac{(b-a)^2}{4}$:

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_2}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4}$$

d) $|\sin''| \le \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle : erreur $\le \frac{1}{2} \cdot \frac{(\pi/6)^2}{8} \approx 0{,}0171$. L'erreur réelle, 0,0090, est bien inférieure (la borne est atteinte seulement si f'' est constante).

Réponse. $f(x) - L(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$; erreur $\le \frac{M_2(b-a)^2}{8}$.

Correction de l'exercice 9 – Inégalités par les accroissements finis

a) $\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+c}$ avec c entre 0 et x ; $\frac{1}{1+c}$ est entre 1 et $\frac{1}{1+x}$. Selon le signe de x, on obtient bien $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ dans les deux cas.

b) $|\sin'| = |\cos| \le 1$ et $|\arctan'| = \frac{1}{1+x^2} \le 1$.

c) $\ln b - \ln a = \frac{b-a}{c}$, $c \in]a, b[$:

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}$$

d) Avec $a = n$, $b = n+1$: $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$. Multiplier par n (resp. $n+1$) et prendre l'exponentielle.

Réponse. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Correction de l'exercice 10 – Méthode de Newton pour √2

a) $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$. C'est l'abscisse où la tangente à la parabole en u_n coupe l'axe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n + 2}{2u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$.

c) Avec $u_n \geq \sqrt{2}$:

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

— le nombre de décimales exactes double environ à chaque étape.

d) $u_1 = 1{,}5$ (erreur $8{,}6 \cdot 10^{-2}$), $u_2 = \frac{17}{12} \approx 1{,}416667$ ($2{,}5 \cdot 10^{-3}$), $u_3 = \frac{577}{408} \approx 1{,}4142157$ ($2{,}1 \cdot 10^{-6}$), $u_4 \approx 1{,}41421356237469$ ($1{,}6 \cdot 10^{-12}$).

Réponse. Convergence quadratique : erreurs 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-12}.

Correction de l'exercice 11 – Lemme de Gronwall (version simple)

a) $(f\mathrm{e}^{-x})' = (f' - f)\mathrm{e}^{-x} = 0$: $f\mathrm{e}^{-x}$ est constante, égale à $f(0) = 0$.

b)

$$g' = 2\mathrm{e}^{-2kx}\left(ff' - kf^2\right) \leq 2\mathrm{e}^{-2kx}\left(kf^2 - kf^2\right) = 0$$

— car $ff' \leq |f||f'| \leq kf^2$.

c) $g \geq 0$, décroissante, $g(0) = 0$: $g = 0$, donc $f = 0$.

d) Si y_1, y_2 sont deux solutions, $f = y_1 - y_2$ vérifie $f' = kf$ et $f(0) = 0$: $f = 0$. Unicité.

Réponse. $|f'| \leq k|f|$ et $f(0) = 0 \Rightarrow f = 0$: unicité pour $y' = ky$.

Correction de l'exercice 12 – Sommes d'exponentielles

a) $n = 1$: $\lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha_1 x} \neq 0$. Hérédité : $g = f\mathrm{e}^{-\alpha_1 x} = \lambda_1 + \sum_{i \geq 2} \lambda_i \mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_1)x}$ a les mêmes zéros que f, et

$$g' = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(\alpha_i - \alpha_1)\mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_1)x}$$

— a au plus $n - 2$ zéros (si les λ_i, $i \geq 2$, ne sont pas tous nuls ; sinon $g = \lambda_1 \neq 0$). Donc g en a au plus $n - 1$.

b) Une combinaison nulle aurait une infinité de zéros.

c) $2^x + 3^x - 5^x$: trois exponentielles, au plus 2 zéros. En fait $x = 1$ est solution, et en divisant par 5^x, $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ a un membre de gauche strictement décroissant : **unique** solution $x = 1$.

d) $X = 2^x$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, $X \in \{1, 2\}$, $x \in \{0, 1\}$: deux solutions ($\leq 3 - 1$).

Réponse. Au plus $n - 1$ zéros ; $2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow x = 1$; $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.

Correction de l'exercice 13 – Accroissements finis et suites

a) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ avec $c \in]k, k+1[$, donc entre $\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{k}}$. En sommant $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$: télescopage.

b) $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ pour $k \geq 2$; en sommant de 2 à n et en ajoutant 1 :

$$S_n \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1) = 2\sqrt{n} - 1$$

c) $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$: $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $2\sqrt{10\,001} - 2 \approx 198{,}01$ et $2\sqrt{10\,000} - 1 = 199$: 198,54 est bien encadré, proche de $2\sqrt{n} = 200$.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 14 – Une égalité de type Rolle

a) Accroissements finis : $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 1$.

b) $g(0) = 0$, $g(1) = 1 - 1 = 0$: Rolle donne $g'(c) = f(c) + cf'(c) - 1 = 0$.

c) $h(x) = f(x) - x^2$: $h(0) = 0 = h(1)$, Rolle : $f'(c) = 2c$.

d) $x \mapsto f(x) - 1 + x$ vaut -1 en 0 et 1 en 1 : TVI, $f(d) = 1 - d$. Puis

$$f'(a) = \frac{f(d)}{d} = \frac{1-d}{d}, \qquad f'(b) = \frac{1 - f(d)}{1-d} = \frac{d}{1-d}$$

— avec $a \in]0, d[$, $b \in]d, 1[$: produit 1.

Réponse. Fonctions auxiliaires $xf(x) - x$, $f(x) - x^2$; point d tel que $f(d) = 1 - d$.

Correction de l'exercice 15 – Monotonie stricte et dérivée

a) $f' = 1 - \cos x \geq 0$, nulle seulement aux points isolés $2k\pi$. Si $f(a) = f(b)$ avec $a < b$, f serait constante sur $[a, b]$ et f' nulle sur un intervalle : impossible.

b) $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$; $(x^3)' = 3x^2$ nul en 0.

c) Sur chaque intervalle entre deux points exceptionnels, accroissements finis : strictement croissante ; on recolle par continuité.

d) $f'(0) = \lim\left(1 + 2h \sin\frac{1}{h}\right) = 1$. Pour $x \neq 0$: $f'(x) = 1 + 4x \sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}$, et

$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1 + 0 - 2 = -1 < 0$$

— par continuité de f' sur $]0, +\infty[$, f décroît au voisinage de ces points, qui s'accumulent en 0.

Réponse. $f' > 0$ en un seul point ne donne aucune monotonie locale ; il faut $f' > 0$ sur un intervalle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).