Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : dérivabilité

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taylor-Lagrange à l'ordre 2 (conséquence de Rolle) : si f est deux fois dérivable,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \text{ entre } x \text{ et } x+h$$

— **Dérivée d'une composée en fonction du temps** : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t)) = f'(x(t))\,x'(t)$.

— **Coût marginal** $C'(q)$; **coût moyen** $\frac{C(q)}{q}$, minimal là où il égale le coût marginal.

— **Différences finies** : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + O(h)$, $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$.

Correction de l'exercice 1 – Radar tronçon

a)

$$v_m = \frac{20}{9/60} = \frac{1200}{9} \approx 133{,}3 \text{ km/h}$$

b) Accroissements finis sur $[t_0, t_0 + 9\text{ min}]$: il existe c avec $x'(c) = v_m$.

c) Non : à l'instant c, sa vitesse était de 133 km/h > 110.

d) $x'(t_0) = 0$ et $x'(c) \approx 133$: la dérivée x' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (Darboux), même sans être supposée continue : toutes les vitesses de $[0, 133]$ ont été atteintes.

Réponse. Vitesse moyenne 133 km/h, atteinte à un instant (accroissements finis) : infraction.

Correction de l'exercice 2 – L'échelle qui glisse

a) $x^2 + y^2 = 25$; en dérivant par rapport à t : $2xx' + 2yy' = 0$, soit

$$y' = -\frac{x}{y}x'$$

b) $x = 3$: $y = 4$, $y' = -\frac{3}{4}$ m/s. $x = 4{,}8$: $y = \sqrt{25 - 23{,}04} = 1{,}4$, $y' = -\frac{4{,}8}{1{,}4} \approx -3{,}43$ m/s.

c) $y \to 0$ et $y' \to -\infty$: le modèle devient irréaliste (en pratique le sommet décolle du mur avant).

d) $y' = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ avec $x' = 1$; en dérivant : $y'' = -\frac{25}{(25-x^2)^{3/2}} = -\frac{25}{64} \approx -0{,}39$ m/s².

Réponse. $y' = -\frac{x}{y}x'$: $-0{,}75$ m/s en $x = 3$, $-3{,}43$ m/s en $x = 4{,}8$.

Correction de l'exercice 3 – Coût moyen et coût marginal

a) $C'(q) = 3q^2 - 12q + 15 = 3(q-2)^2 + 3$: minimal en $q = 2$ (valeur 3).

b) $C_M' = \frac{qC' - C}{q^2}$: nul si et seulement si $C' = \frac{C}{q}$.

c) $C_M(q) = q^2 - 6q + 15 + \frac{10}{q}$ et $C_M'(q) = 2q - 6 - \frac{10}{q^2} = \frac{2(q^3 - 3q^2 - 5)}{q^2}$. La fonction $\varphi(q) = q^3 - 3q^2 - 5$ est négative sur $]0, 2]$ puis strictement croissante sur $[2, +\infty[$: une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

seule racine q_0, avec $\varphi(3{,}42) < 0 < \varphi(3{,}43)$.

d) $q_0 \approx 3{,}426$:

$$C_M(q_0) \approx 9{,}100 \approx C'(q_0)$$

— (le coût marginal coupe le coût moyen en son minimum).

Réponse. Coût moyen minimal pour $q_0 \approx 3{,}43$ (milliers), valeur $\approx 9{,}10$, égale au coût marginal.

Correction de l'exercice 4 – Inégalité de Landau-Kolmogorov

a) $f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_{1,2})$; on soustrait.

b) $2h|f'(x)| \le |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2} \cdot 2M_2 \le 2M_0 + h^2 M_2$; on divise par $2h$.

c) $h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ est minimale en $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, où elle vaut

$$\frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} = \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0 M_2}{2}} = \sqrt{2M_0 M_2}$$

d) $M_0 = M_2 = 1$: $|\cos| \le 1 \le \sqrt{2}$ ✓. On montre que $\sqrt{2}$ est la meilleure constante possible sur $\mathbb{R}$. Interprétation : une fonction bornée dont la courbure est bornée ne peut pas avoir une pente arbitrairement grande.

Réponse. $\|f'\|_\infty \le \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

Correction de l'exercice 5 – Équation différentielle non linéaire f′ = f²

a) La fonction nulle est solution de $y' = y^2$ avec $y(x_0) = 0$; par unicité, f serait nulle, contredisant $f(0) = 1$.

b) $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} = -1$, donc $\frac{1}{f} = -x + c$ avec $c = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

c) $I =]-\infty, 1[$: la solution tend vers $+\infty$ quand $x \to 1^-$. Une équation aussi simple peut avoir des solutions qui « explosent » en temps fini.

d) $g = \mathrm{e}^x$ est définie sur $\mathbb{R}$: pour une croissance proportionnelle à g, pas d'explosion ; proportionnelle à f^2, explosion.

Réponse. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$: explosion en $x = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Dérivation numérique

a) $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$: $D_1 - f'(x) = \frac{h}{2} f''(\xi)$.

b) Les termes pairs se compensent :

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2))$$

— d'où $|D_2 - f'(x)| \le \frac{h^2}{6} M_3$.

c) Erreurs : $D_1 - \cos 1 \approx -4{,}2 \cdot 10^{-3}$ (ordre $\frac{h}{2}\sin 1$), $D_2 - \cos 1 \approx -9{,}0 \cdot 10^{-6}$ (ordre $\frac{h^2}{6}\cos 1$) : la formule centrée est bien meilleure.

d) $\frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$: $D_2 \to 0$ alors que $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. D_1 : erreur $O(h)$; D_2 : erreur $O(h^2)$; D_2 peut converger sans dérivabilité.

Correction de l'exercice 7 – Suite implicite x + ln x = n

a) $\varphi(x) = x + \ln x$ est continue, strictement croissante ($\varphi' = 1 + \frac{1}{x} > 0$), de $-\infty$ à $+\infty$: bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

b) $x_n = \varphi^{-1}(n)$ avec φ^{-1} croissante, de limite $+\infty$.

c) Pour $n \geq 1$, $x_n \geq 1$ donc $\ln x_n \geq 0$ et $x_n \leq n$; puis $0 \leq \frac{\ln x_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n} \to 0$: $\frac{x_n}{n} \to 1$.

d) $x_n = n - \ln x_n = n - \ln n - \ln \frac{x_n}{n}$ et

$$\varepsilon_n = -\ln \frac{x_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln 1 = 0$$

— Pour $n = 100$: $100 - \ln 100 \approx 95{,}395$, écart $\varepsilon_{100} \approx 0{,}047$.

Réponse. $x_n = n - \ln n + o(1)$; $x_{100} \approx 95{,}44$.

Correction de l'exercice 8 – Dérivabilité et suites

a) Caractérisation séquentielle de la limite du taux, avec $h = \frac{1}{n}$.

b) $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$: $n(f(\frac{1}{n}) - f(0)) = n(1 - 1) = 0 \to 0$, mais f n'est même pas continue en 0.

c) Écrire $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon \to 0$. Alors

$$\frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = f'(a) + \frac{(v_n - a)\varepsilon(v_n) - (u_n - a)\varepsilon(u_n)}{v_n - u_n}$$

— et $\frac{v_n - a}{v_n - u_n}$, $\frac{a - u_n}{v_n - u_n}$ sont dans $[0, 1]$: le reste tend vers 0.

d) Non. Ici $f'(0) = 0$, et par les accroissements finis la pente de la corde vaut $f'(\xi_n)$ avec $|\xi_n - x_n| \leq x_n^3$. Or $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ vaut -1 en x_n, et $|f''| \leq \frac{C}{x^2}$ près de x_n : $|f'(\xi_n) - f'(x_n)| \leq \frac{C}{x_n^2} x_n^3 \to 0$. La pente tend vers $-1 \neq f'(0)$. L'hypothèse « a entre » borne les poids $\frac{v_n - a}{v_n - u_n}$ par 1 ; sans elle, ils explosent.

Réponse. Taux « encadrant » $a \to f'(a)$; la convergence de $n(f(a + \frac{1}{n}) - f(a))$ ne suffit pas.

Correction de l'exercice 9 – Portée d'un tir

a) $\sin 2\theta$ maximal pour $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$$R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400}{9{,}8} \approx 40{,}8 \text{ m}$$

b) $\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$.

c) $R'(\theta) = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}$ est nul en $\frac{\pi}{4}$: l'approximation affine donne une perte nulle au premier ordre. Valeur exacte : $R(50°) = 40{,}8 \sin 100° \approx 40{,}2$ m, perte $\approx 0{,}6$ m (1,5 %). Un extremum rend la grandeur **peu sensible** aux erreurs de réglage.

d) $\frac{v_0^2 \cdot 2 \sin\theta \cos\theta}{g} = 4 \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \Leftrightarrow \cos\theta = \sin\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\theta = 45°$, $R_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \approx 40{,}8$ m ; perte seulement du second ordre autour de l'optimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Inégalité de Huygens

a) $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 2c + \frac{1}{c^2} - 3$.

b) $\psi'(c) = 2 - \frac{2}{c^3} \le 0$ sur $]0,1]$: ψ décroissante, $\psi(c) \ge \psi(1) = 3$.

c) $f' \ge 0$ et $f(0) = 0$: $f \ge 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

d) $\frac{\pi}{n} \le \frac{2\sin\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n}}{3}$: pour $n = 6$,

$$\pi \le 6 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3{,}1547$$

— majoration de π utilisée par Huygens, bien meilleure que celle de l'hexagone circonscrit ($2\sqrt{3} \approx 3{,}46$).

Réponse. $2\sin x + \tan x \ge 3x$; pour $n = 6$: $\pi \le 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3{,}155$.

Correction de l'exercice 11 – Équation fonctionnelle et dérivation

a) $x = y = 0$: $f(0) = 2f(0)$, $f(0) = 0$.

b) $\frac{\partial}{\partial y}$: $f'(x+y) = f'(y) + 2x$; en $y = 0$: $f'(x) = f'(0) + 2x$.

c) En intégrant, avec $a = f'(0)$ et $f(0) = 0$:

$$f(x) = x^2 + ax$$

— Vérification : $(x+y)^2 + a(x+y) = x^2 + ax + y^2 + ay + 2xy$ ✓.

d) $f'(x+y) = f(x)f'(y)$, en $y = 0$: $f' = af$ avec $a = f'(0)$, donc $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ (par $(f\mathrm{e}^{-ax})' = 0$).

Réponse. $f(x) = x^2 + ax$; pour $f(x+y) = f(x)f(y)$: e^{ax}.

Correction de l'exercice 12 – Deux zéros de la dérivée

a) $\frac{f(x)}{x-a} \to f'(a) > 0$: $f(x) > 0$ pour $x > a$ proche de a. De même $\frac{f(x)}{x-b} \to f'(b) > 0$ et $x - b < 0$: $f(x) < 0$ près de b.

b) TVI entre ces deux points.

c) Rolle sur $[a,c]$ et $[c,b]$:

$$\exists\, c_1 \in]a,c[,\ c_2 \in]c,b[, \quad f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

d) $f(0) = f(2) = 0$, $f' = 3x^2 - 6x + 2$: $f'(0) = 2 > 0$, $f'(2) = 2 > 0$ ✓. $c = 1$; $f' = 0$ en $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}42$ et $1{,}58$ ✓.

Réponse. f s'annule dans $]a,b[$ et f' au moins deux fois.

Correction de l'exercice 13 – Une fonction non dérivable par morceaux

a) $x^2 \ge 2 - x^2 \Leftrightarrow |x| \ge 1$: $f(x) = 2 - x^2$ sur $[-1,1]$, x^2 ailleurs.

b) En 1 : à gauche $f' = -2x \to -2$, à droite $f' = 2x \to 2$: point anguleux, non dérivable. Idem en -1.

c)

$$\min f = f(\pm 1) = 1$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— atteint en des points **où f n'est pas dérivable** : la condition $f'(c) = 0$ ne s'applique qu'aux points de dérivabilité.

d) Non : dérivées latérales $\max(g'(a), h'(a))$ à droite et $\min(g'(a), h'(a))$ à gauche, différentes.

Réponse. Non dérivable en ± 1 ; minimum 1 atteint en ces points anguleux.

Correction de l'exercice 14 – Dérivée d'une fonction définie par un produit

a) $\frac{f'(0)}{f(0)} = \sum k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $f(0) = 1$: $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\left(\frac{f}{f}\right)' = \frac{f'f - f^2}{f^2} = -\sum \frac{k^2}{(1+kx)^2}$. En 0 :

$$f''(0) = f'(0)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) Coefficient $\frac{f''(0)}{2}$. Pour $n = 3$: $f''(0) = 36 - 14 = 22$, coefficient 11. Directement : $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3$ ✓.

d) C'est $\sum_{i<j} ij$: somme des produits de deux entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$ ($1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 = 11$).

Réponse. $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$; coefficient de x^2 : $\sum_{i<j} ij$ (11 pour $n = 3$).

Correction de l'exercice 15 – Taux de variation d'une aire

a) $A = \pi r^2$, $A' = 2\pi r r' = 4\pi r$: $40\pi \approx 126$ cm²/s pour $r = 10$; $200\pi \approx 628$ cm²/s pour $r = 50$.

b) $A(t) = \pi t$: $A' = \pi$, constante.

c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V' = 4\pi r^2 r'$, donc

$$r' = \frac{V'}{4\pi r^2} = \frac{100}{400\pi} \approx 0{,}080 \text{ cm/s}$$

d) $S = 4\pi r^2$, $S' = 8\pi r r' = 8\pi \cdot 10 \cdot \frac{1}{4\pi} = 20$ cm²/s (en fait $S' = \frac{2V'}{r}$).

Réponse. $A' = 4\pi r$ cm²/s ; ballon : $r' \approx 0{,}08$ cm/s et $S' = 20$ cm²/s pour $r = 10$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).