Plaquette 1 – Taux de variation, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et théorèmes du cours.

— **Dérivabilité en** a : f est dérivable en a si le taux de variation admet une limite finie :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

— La dérivabilité en a **implique** la continuité en a ; la réciproque est fausse ($|x|$ en 0).

— **Dérivées à gauche et à droite** : f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont **égales**.

— **Opérations** : $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$.

— **Théorème de Rolle** : si f est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

— **Égalité des accroissements finis** : sous les mêmes hypothèses de régularité, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

— **Inégalité des accroissements finis** : si $|f'| \leq M$ sur $[a\,;b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

— **Monotonie** : $f' \geq 0$ sur un intervalle $\Leftrightarrow$ f croissante ; $f' > 0$ (sauf en des points isolés) $\Rightarrow$ f strictement croissante.

— **Extremum intérieur** : si f admet un extremum **local** en un point intérieur c et y est dérivable, alors $f'(c) = 0$.

Correction de l'exercice 1 – Dérivabilité par la définition

On forme le taux de variation en $a = 3$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

— Le calcul est licite pour $h \neq 0$.

— Quand $h \to 0$, le taux tend vers 6 : f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

— Contrôle par la formule usuelle : $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$. Cohérent.

Réponse. $f'(3) = 6$.

Correction de l'exercice 2 – Non-dérivabilité

a) - À droite : pour $h > 0$, $\frac{|h| - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1$, donc $f'_d(0) = 1$.

— À gauche : pour $h < 0$, $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, donc $f'_g(0) = -1$.

b) Les deux dérivées existent mais **diffèrent** : f n'est **pas dérivable** en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— En revanche, f est **continue** en 0 : $|x| \to 0 = f(0)$.
— **Conclusion importante** : continuité n'implique pas dérivabilité. Graphiquement, la courbe présente un **point anguleux**.

Réponse. a) 1 et -1 · b) non dérivable, mais continue.

Correction de l'exercice 3 – Tangente verticale

Taux de variation en 0, pour $h > 0$:

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

— Quand $h \to 0^+$, ce taux tend vers $+\infty$: la limite n'est **pas finie**.
— Donc f n'est **pas dérivable** en 0, bien qu'elle y soit continue.
— **Interprétation géométrique** : la courbe admet en 0 une **demi-tangente verticale**.
— Sur $]0\,;+\infty[$, en revanche, f est dérivable de dérivée $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Réponse. Non dérivable en 0 (tangente verticale), dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 4 – Dérivées de composées

On applique $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$.

a) $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

— b) $u = 3x^2$, $u' = 6x$: $g'(x) = 6x\cos(3x^2)$.
— c) $u = \cos x$, $u' = -\sin x$: $h'(x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x}$.
— **Contrôle de a)** : $|f'(x)| < 1$ pour tout x, ce qui est cohérent avec le fait que $\sqrt{x^2+1}$ croît moins vite que x.

Réponse. a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ · b) $6x\cos(3x^2)$ · c) $-\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x}$.

Correction de l'exercice 5 – Dérivabilité d'une fonction par morceaux

Deux conditions sont nécessaires en $x = 1$: la **continuité**, puis l'égalité des dérivées.

— **Continuité** : $\lim_{x \to 1^-} f = 1$ et $\lim_{x \to 1^+} f = a + b$, donc $a + b = 1$.
— **Dérivabilité** : à gauche $f'(x) = 2x \to 2$; à droite $f'(x) = a$. Il faut donc $a = 2$.
— On en déduit $b = 1 - a = -1$.
— **Vérification** : la fonction est x^2 puis $2x - 1$; en 1 les deux valent 1, et les deux dérivées valent 2. La droite $y = 2x - 1$ est d'ailleurs la **tangente** à la parabole en $x = 1$.

Réponse. $a = 2$ et $b = -1$.

Correction de l'exercice 6 – Théorème de Rolle

a) - f est polynomiale, donc **continue** sur $[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}]$ et **dérivable** sur l'intervalle ouvert.
— $f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0$ et $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$: les valeurs aux bornes sont **égales**.
— Les hypothèses de Rolle sont donc vérifiées.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, qui s'annule pour $x = \pm 1$.
— Les deux valeurs appartiennent à $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$ (car $\sqrt{3} \approx 1{,}732$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Il y a donc **deux** valeurs de c : $c = -1$ et $c = 1$. Le théorème garantit l'existence d'au moins une, pas l'unicité.

Réponse. b) $c = -1$ et $c = 1$.

Correction de l'exercice 7 – Égalité des accroissements finis

L'EAF affirme l'existence de $c \in]1\,;4[$ tel que $f(4) - f(1) = (4-1)f'(c)$.

— Membre de gauche : $16 - 1 = 15$.
— Donc $15 = 3 \times 2c$, soit $6c = 15$ et $c = 2{,}5$.
— $2{,}5 \in]1\,;4[$: c'est bien la valeur cherchée.
— **Interprétation** : la tangente en $c = 2{,}5$ est **parallèle** à la corde joignant les points d'abscisses 1 et 4. Ici c est le milieu, ce qui est propre aux fonctions du second degré.

Réponse. $c = 2{,}5$.

Correction de l'exercice 8 – Inégalité des accroissements finis

On applique l'**inégalité des accroissements finis** à la fonction sin.

— sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cos, et $|\cos x| \leq 1$ pour tout x.
— L'IAF avec $M = 1$ donne directement $|\sin b - \sin a| \leq 1 \times |b - a|$.
— **Application classique** : en prenant $a = 0$, on retrouve $|\sin b| \leq |b|$, inégalité très utilisée pour les encadrements.
— Remarque : cette propriété signifie que sin est 1**-lipschitzienne**.

Réponse. IAF avec $|\cos| \leq 1$: $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Correction de l'exercice 9 – Inégalité par étude de fonction

On étudie $g(x) = x - \ln(1+x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

— g est dérivable, et $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
— Pour $x > 0$: $g'(x) > 0$, donc g est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.
— Or $g(0) = 0 - \ln 1 = 0$.
— Donc pour $x > 0$: $g(x) > g(0) = 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) > 0$, soit $\ln(1+x) < x$.
— **Méthode générale** : pour démontrer une inégalité entre deux fonctions, on étudie le signe de leur **différence**.

Réponse. $g(x) = x - \ln(1+x)$ est strictement croissante et $g(0) = 0$.

Correction de l'exercice 10 – Compter les racines

Soit $f(x) = x^3 - 6x + 2$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

— $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$, qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$.
— **Variations** : f croît sur $]-\infty\,;-\sqrt{2}]$, décroît sur $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}]$, croît sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.
— Valeurs des extremums : $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2 = 4\sqrt{2} + 2 \approx 7{,}66 > 0$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2 = -4\sqrt{2} + 2 \approx -3{,}66 < 0$.
— Sur chacune des trois branches monotones, f change de signe (limites $\mp\infty$ aux bornes infinies) : par le **corollaire du TVI**, chacune fournit **exactement une** racine.
— L'équation a donc exactement **trois** solutions réelles.

Réponse. Trois racines : maximum local > 0 et minimum local < 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Extremum et dérivée nulle

— a) Théorème du cours : $f'(c) = 0$. (Démonstration : les taux de variation à gauche et à droite ont des signes opposés, leurs limites communes valent donc 0.)
— b) **Non** : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est **pas** un extremum — la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
— **Vocabulaire** : 0 est un **point critique** sans être un extremum ; c'est ici un point d'inflexion à tangente horizontale.
— **Conséquence pratique** : après avoir résolu $f'(x) = 0$, il faut toujours étudier le **signe** de f' autour du point.

Réponse. a) $f'(c) = 0$ · b) non : x^3 en 0.

Correction de l'exercice 12 – Dérivée et bijection

a) - f est dérivable, et $f'(x) = 1 + e^x > 0$: f est **strictement croissante**.
— Limites : $f(x) \to -\infty$ en $-\infty$ et $f(x) \to +\infty$ en $+\infty$.
— f est donc une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Formule de la dérivée de la réciproque : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

— On cherche x tel que $f(x) = 1$: $x + e^x = 1$ est vérifié pour $x = 0$ (car $0 + 1 = 1$). Donc $f^{-1}(1) = 0$.
— $f'(0) = 1 + 1 = 2$, donc $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Réponse. a) bijection (stricte croissance, limites $\pm\infty$) · b) $\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Synthèse : Rolle appliqué

On applique **Rolle** sur chacun des deux intervalles.

— Sur $[a\,;b]$: P est continue et dérivable (polynôme), et $P(a) = P(b) = 0$. Il existe donc $c_1 \in]a\,;b[$ tel que $P'(c_1) = 0$.
— Sur $[b\,;c]$: de même, il existe $c_2 \in]b\,;c[$ tel que $P'(c_2) = 0$.
— Ces deux racines sont **distinctes** puisque $c_1 < b < c_2$.
— **Exactement deux** : P' est un polynôme de degré 2, il a donc au plus deux racines. Les deux trouvées sont donc les seules.
— **Généralisation** : un polynôme de degré n à racines réelles distinctes a une dérivée dont toutes les racines sont réelles et intercalées entre celles de P.

Réponse. Rolle sur $[a\,;b]$ et $[b\,;c]$, et $\deg P' = 2$ borne le nombre de racines.

Correction de l'exercice 14 – Dérivable mais pas de classe C^1

a) $|f(x)| \leq x^2 \to 0$: continue. Le taux d'accroissement vérifie

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \left|h \sin\frac{1}{h}\right| \leq |h| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

— donc $f'(0) = 0$.

b) Produit et composée : $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

c) $2x \sin\frac{1}{x} \to 0$, mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite (valeurs 1 et -1 le long de $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$) : $f'(x_n) \to -1$, $f'(y_n) \to 1$. f' est discontinue en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) $g'(0) = \lim h^2 \sin\frac{1}{h} = 0$ et, pour $x \neq 0$, $g'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$, majoré en valeur absolue par $3x^2 + |x| \to 0 = g'(0)$: g' est continue.

Réponse. $f'(0) = 0$ mais f' discontinue en 0 ; $x^3 \sin\frac{1}{x}$ est C^1.

Correction de l'exercice 15 – Règle de L'Hôpital par Cauchy

a) $h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b)$ (vérification directe) : Rolle donne $h'(c) = 0$. $g(b) \neq g(a)$ sinon Rolle appliqué à g annulerait g'.

b) Pour $x \in]a, b[$, a) sur $[a, x]$ donne $c_x \in]a, x[$ avec

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

— et $c_x \to a^+$ quand $x \to a^+$: le rapport tend vers ℓ.

c) $\frac{1 - \cos x}{3x^2}$, puis $\frac{\sin x}{6x} \to \frac{1}{6}$: la limite vaut $\frac{1}{6}$ (contrôle : $x = 0{,}01$ donne 0,1666658).

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin\frac{1}{x} \to 0$, alors que $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite.

Réponse. Accroissements finis généralisés ⇒ L'Hôpital ; $\frac{x - \sin x}{x^3} \to \frac{1}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).