Plaquette 2 – Dérivées successives, formule de Leibniz, classe C^n

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour une dérivée n-ième, trois stratégies : **conjecturer puis démontrer par récurrence** (calculer f', f'', f''', repérer le motif), **décomposer** en éléments simples dont les dérivées sont connues ($\frac{1}{x-a}$, e^{ax}, $\sin(ax+b)$), ou appliquer la **formule de Leibniz** à un produit dont un facteur est un polynôme (la somme s'arrête alors après quelques termes). Pour la **classe** d'une fonction définie par morceaux, on étudie chaque raccord : existence de la dérivée au point (taux d'accroissement ou théorème de la limite de la dérivée), puis continuité de la dérivée.

Exercice 1 – Leibniz avec un facteur polynomial

a) Calculer $\left(x^2\mathrm{e}^x\right)^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

b) Calculer $\left(x^3\mathrm{e}^{-x}\right)^{(n)}$ en 0 pour tout n.

c) Calculer $\left((x^2+1)\sin x\right)^{(n)}$.

d) Vérifier a) pour $n=1$ et $n=2$ par un calcul direct.

Exercice 2 – Décomposer pour dériver n fois

a) Décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ en somme de deux fractions simples et en déduire sa dérivée n-ième.

b) Même question pour $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$; calculer $f^{(n)}(0)$.

c) Vérifier b) pour $n=0$ et $n=1$.

d) Calculer la dérivée n-ième de $\frac{1}{1+x^2}$ en passant par $\frac{1}{x-\mathrm{i}}$ et $\frac{1}{x+\mathrm{i}}$ (on admet que les règles valent pour une variable réelle et des coefficients complexes).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – La fonction plate exp(−1/x²)

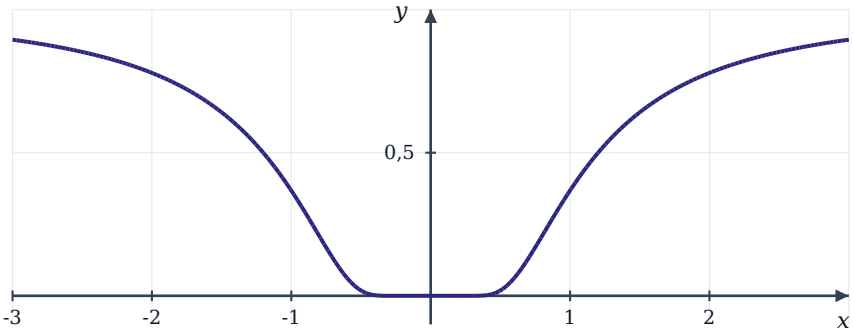
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

a) Montrer par récurrence que pour $x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$ où P_n est un polynôme. Calculer P_1 et P_2.

b) Montrer que $P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} \to 0$ en 0 pour tout polynôme P.

c) En déduire que f est de classe C^∞ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

d) Pourquoi cette fonction est-elle surprenante ?



La courbe de x ↦ e^(−1/x²), très plate en 0

Exercice 4 – Théorème de la limite de la dérivée

a) Démontrer le théorème : si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$ et $f'(x) \to \ell$ quand $x \to a^+$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (accroissements finis sur $[a, x]$).

b) Application : montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, prolongée par 1 en 0, est C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $g(x) = x^2 \ln|x|$, $g(0) = 0$, est C^1 mais pas deux fois dérivable en 0.

d) Le théorème donne-t-il une condition **nécessaire** ? (reprendre $x^2 \sin\frac{1}{x}$)

Exercice 5 – Dérivées n-ièmes par récurrence

a) Montrer que $\left(x^{n-1}\ln x\right)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que $(\mathrm{e}^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

c) Calculer $\left(\cos^3 x\right)^{(n)}$ en linéarisant.

d) Vérifier a) pour $n = 3$.

Exercice 6 – Une identité combinatoire par Leibniz

a) Calculer $\left(x^{2n}\right)^{(n)}$ directement.

b) Calculer la même dérivée en écrivant $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ et en appliquant Leibniz.

c) En déduire l'identité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

d) Vérifier pour $n = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Dérivées successives de arctan en 0

Soit $f = \arctan$.

a) Vérifier que $(1 + x^2)f'(x) = 1$.

b) Dériver n fois cette relation ($n \geq 1$) avec Leibniz.

c) En déduire $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$, puis $f^{(2k)}(0)$ et $f^{(2k+1)}(0)$.

d) Retrouver le début du développement $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

Exercice 8 – Polynômes d'Hermite

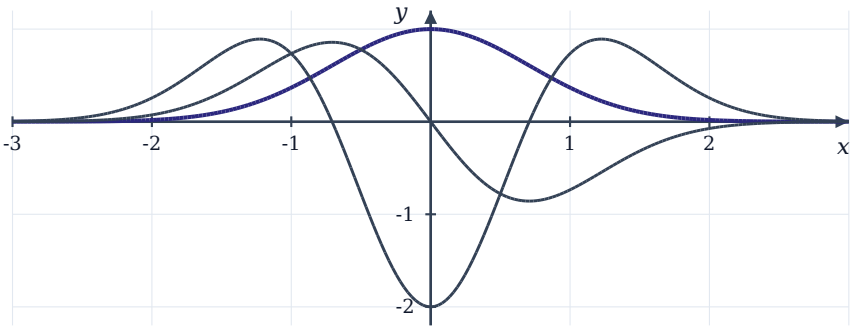
Soit $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Montrer que $g^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ où H_n est un polynôme vérifiant $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$.

b) Calculer H_0, H_1, H_2, H_3.

c) Montrer que H_n est de degré n, de coefficient dominant 2^n, et de la parité de n.

d) Vérifier que $g''(x) = (4x^2 - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$ par un calcul direct.



g (épaisse), g′ et g″

Exercice 9 – Classe d'une fonction $|x|^k$

a) Montrer que $x \mapsto x|x|$ est de classe C^1 mais pas deux fois dérivable en 0.

b) Montrer que $x \mapsto |x|^3$ est C^2 mais pas C^3.

c) Généraliser : de quelle classe est $x \mapsto x^n|x|$?

d) Donner une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{Z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Raccords réguliers (smoothstep)

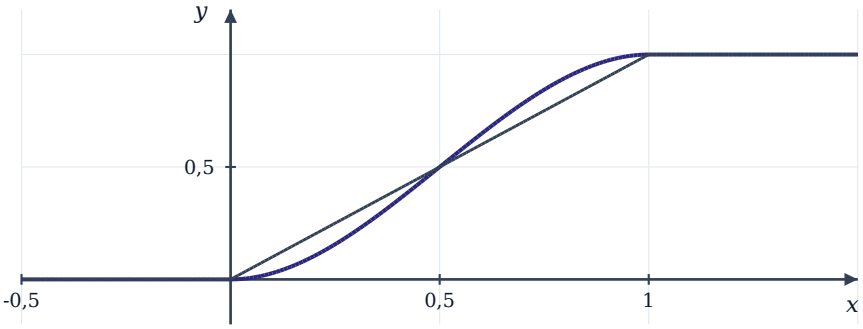
On veut raccorder 0 (pour $x \le 0$) et 1 (pour $x \ge 1$) par un polynôme P sur $[0,1]$.

a) Trouver P de degré 3 tel que la fonction obtenue soit C^1.

b) Est-elle C^2 ?

c) Vérifier que $Q(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ donne un raccord C^2.

d) Montrer qu'aucun polynôme ne donne un raccord C^∞ (penser aux dérivées successives en 0). Quelle fonction de la plaquette permet d'en construire un ?



Raccord polynomial (épais) et raccord affine

Exercice 11 – Dérivées successives d'une composée

Soient f, g deux fois dérivables.

a) Montrer que $(g \circ f)'' = f'' \cdot g' \circ f + f'^2 \cdot g'' \circ f$.

b) Calculer $(g \circ f)'''$.

c) Application : calculer les trois premières dérivées de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$ en 0.

d) En déduire le développement $\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + o(x^3)$ et le vérifier en $x = 0{,}1$.

Exercice 12 – Produit de fonctions de classe C^n

a) Montrer par récurrence sur n, à l'aide de Leibniz, que le produit de deux fonctions C^n est C^n.

b) Montrer que l'inverse $\frac{1}{f}$ d'une fonction C^n ne s'annulant pas est C^n (récurrence sur n, en utilisant $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$).

c) En déduire que tan est C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que $\tan' = 1 + \tan^2$.

d) En déduire que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$ avec P_n polynôme ; calculer P_2 et P_3.

Exercice 13 – Nombre de zéros d'une dérivée n-ième

Soit $P(x) = (x^2 - 1)^n$ et $L_n = P^{(n)}$ (à une constante près, le polynôme de Legendre).

a) Quel est le degré de L_n ? Calculer L_1 et L_2.

b) Montrer que $P^{(k)}(\pm 1) = 0$ pour $0 \le k \le n - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Par applications répétées du théorème de Rolle, montrer que $P^{(k)}$ a au moins k zéros distincts dans $]-1,1[$ pour $1 \le k \le n$.

d) Conclure que L_n a exactement n racines réelles distinctes, toutes dans $]-1,1[$. Vérifier sur L_2.

Exercice 14 – Dérivées d'une réciproque

Soit f une bijection C^2 d'un intervalle I sur J, avec f' ne s'annulant pas.

a) Rappeler $(f^{-1})'$ et montrer que f^{-1} est C^1.

b) Montrer que f^{-1} est C^2 et que $(f^{-1})'' = -\dfrac{f'' \circ f^{-1}}{\left(f' \circ f^{-1}\right)^3}$.

c) Application : $f(x) = x^3 + x$. Calculer $(f^{-1})'(2)$ et $(f^{-1})''(2)$.

d) Vérifier c) numériquement (avec $f^{-1}(2{,}01) \approx 1{,}0024953$ et $f^{-1}(1{,}99) \approx 0{,}9974953$).

Exercice 15 – Synthèse : une équation différentielle et ses dérivées

Soit $y(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$.

a) Montrer que $(1-x^2)y' - xy = 1$.

b) Dériver n fois cette relation (Leibniz) et obtenir $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2 y^{(n-1)} = 0$ pour $n \ge 1$.

c) En déduire $y^{(n+1)}(0) = n^2 y^{(n-1)}(0)$, puis $y^{(2k)}(0)$ et $y^{(2k+1)}(0)$.

d) Vérifier $y'(0) = 1$ et $y'''(0) = 4$ par le développement $\arcsin x \approx x + \dfrac{x^3}{6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).