Plaquette 4 – Études de fonctions et optimisation

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Un problème d'optimisation se traite en quatre temps : **modéliser** (choisir une variable, exprimer la grandeur à optimiser et son domaine), **dériver** et étudier le signe de la dérivée, **conclure** à l'aide du tableau de variations (un point critique n'est pas forcément un extremum ; sur un intervalle ouvert, vérifier les limites aux bornes), puis **interpréter** le résultat et le contrôler (ordre de grandeur, cas limites). Pour une inégalité, on étudie la **différence** des deux membres ; pour une discussion du nombre de solutions de $f(x) = a$, on lit le tableau de variations de f.

Exercice 1 – La boîte sans couvercle

Dans un carton carré de côté 30 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

a) Exprimer le volume $V(x)$ et préciser le domaine de x.

b) Étudier les variations de V.

c) Quel est le volume maximal ? Pour quel x ?

d) Généraliser pour un carton de côté a : montrer que $x = \frac{a}{6}$ et $V_{\max} = \frac{2a^3}{27}$.

Exercice 2 – La canette optimale

Une canette cylindrique doit contenir $V = 330$ cm³. On veut minimiser la surface de métal $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

a) Exprimer S en fonction de r seul.

b) Montrer que S est minimale pour $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$ et que alors $h = 2r$.

c) Calculer r, h et $S_{\min}$.

d) Une vraie canette mesure environ $r = 3{,}25$ cm et $h = 11{,}5$ cm. Pourquoi n'est-elle pas optimale selon ce modèle ? (comparer les surfaces)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Loi de Snell-Descartes

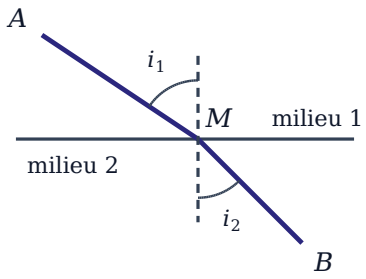
Un rayon lumineux va de $A = (0, a)$ (milieu 1, vitesse v_1) à $B = (d, -b)$ (milieu 2, vitesse v_2), en traversant l'axe des abscisses en $M = (x, 0)$.

a) Exprimer la durée du trajet $T(x)$.

b) Calculer $T'(x)$ et l'exprimer à l'aide des angles d'incidence i_1 et de réfraction i_2 (mesurés par rapport à la verticale).

c) Montrer que T' est strictement croissante et que T admet un unique minimum, caractérisé par $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$.

d) Cas $v_1 = v_2$: retrouver que le trajet optimal est rectiligne.



Réfraction à la traversée d'une interface

Exercice 4 – Éclairement d'une table

Une lampe est suspendue à la hauteur h au-dessus du centre d'une table ronde de rayon $a = 1$ m. L'éclairement au bord est $E(h) = k\frac{\cos\theta}{r^2}$, où r est la distance lampe-bord et θ l'angle avec la verticale.

a) Montrer que $E(h) = \frac{kh}{(h^2 + a^2)^{3/2}}$.

b) Étudier les variations de E sur $]0, +\infty[$.

c) À quelle hauteur placer la lampe pour éclairer le mieux le bord ?

d) Calculer $E_{\max}$ pour $k = 1$ et interpréter les limites en 0 et en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Distance d'un point à une parabole

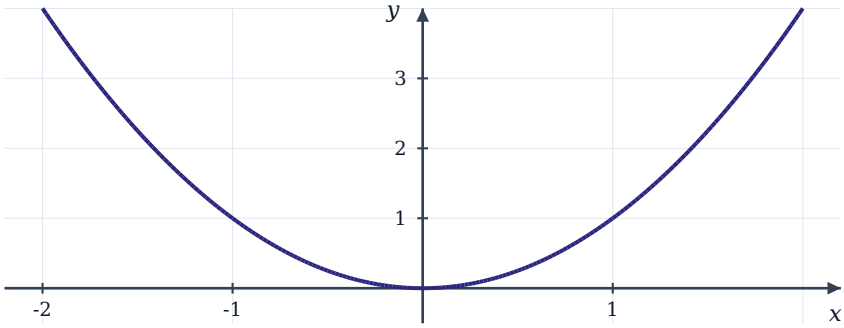
Soit P la parabole $y = x^2$ et $A = (0, 2)$.

a) Exprimer le carré de la distance $d(x)^2 = AM^2$ pour $M = (x, x^2)$.

b) Déterminer les points de P les plus proches de A et la distance minimale.

c) Vérifier que la droite (AM) est alors perpendiculaire à la tangente en M.

d) Pour $A = (0, c)$, discuter selon c : le point le plus proche est-il le sommet ?



La parabole $y = x^2$; $A = (0, 2)$ sur l'axe

Exercice 6 – Nombre de solutions de $e^x = ax$

On discute selon $a \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de $e^x = ax$.

a) Montrer que 0 n'est jamais solution et que l'équation équivaut à $\frac{e^x}{x} = a$.

b) Étudier $g(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Conclure selon a.

d) Interpréter $a = e$: la droite $y = ex$ est tangente à la courbe de exp. En quel point ?

Exercice 7 – Moyenne et médiane comme minimiseurs

Soient $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ des réels.

a) Montrer que $F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$ est minimale en la moyenne $\overline{a}$.

b) Soit $G(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Calculer $G'(x)$ en un point x distinct des a_i.

c) En déduire que G est minimale en la **médiane** (pour n impair, $a_{(n+1)/2}$).

d) Application : $a = (1, 2, 3, 10, 100)$. Comparer moyenne et médiane et commenter la sensibilité aux valeurs extrêmes.

Exercice 8 – La fenêtre normande

Une fenêtre est formée d'un rectangle de largeur w et hauteur h, surmonté d'un demi-disque de diamètre w. Son périmètre vaut $P = 6$ m.

a) Exprimer h en fonction de w, puis l'aire $A(w)$.

b) Déterminer w maximisant l'aire.

c) Montrer qu'alors $h = \frac{w}{2}$.

d) Calculer l'aire maximale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Inégalités classiques par étude de fonction

Montrer, par étude de la différence :

a) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ pour $x \geq 0$; que se passe-t-il pour $x < 0$?

b) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour $x \geq 0$.

c) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout x.

d) En déduire une valeur approchée de $\cos 0{,}1$ à 10^{-5} près.

Exercice 10 – Tangentes passant par un point

a) Déterminer les tangentes à la courbe de exp qui passent par l'origine.

b) Déterminer les tangentes à la parabole $y = x^2$ passant par $(0, -1)$.

c) Plus généralement, combien de tangentes à $y = x^2$ passent par (p, q) ? Discuter selon la position du point.

d) Déterminer les tangentes à $y = x^3$ passant par $(1, 0)$.

Exercice 11 – Dérivée logarithmique

Soit $P(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)$.

a) Montrer que $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$ pour $x \notin \{1, \ldots, n\}$.

b) En déduire $P'(0)$ en fonction de $n!$ et de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) Montrer que $\left(\frac{P'}{P}\right)' < 0$, et en déduire que $P'^2 - PP'' > 0$ hors des racines de P.

d) En déduire que $\frac{P'}{P}$ s'annule exactement une fois entre deux racines consécutives de P (retrouver Rolle et l'unicité).

Exercice 12 – Étude de arctan x − x/(1 + x²)

Soit $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$.

a) Calculer f' et étudier les variations de f.

b) Calculer les limites en $\pm\infty$ et étudier la parité.

c) En déduire que $\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2}$ pour $x \geq 0$.

d) Montrer que $f(x) \sim \frac{2x^3}{3}$ en 0 (utiliser $\frac{f(x)}{x^3}$ et L'Hôpital, ou les dérivées successives).

Exercice 13 – Méthode de Newton pour la racine cubique

On cherche $\sqrt[3]{2}$ avec la méthode de Newton appliquée à $f(x) = x^3 - 2$, depuis $u_0 = 1$.

a) Écrire la récurrence et montrer que $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + \frac{2}{3u_n^2}$.

b) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

c) Montrer que $u_n \geq \sqrt[3]{2}$ pour $n \geq 1$ (étudier $g(x) = \frac{2x}{3} + \frac{2}{3x^2}$, son minimum).

d) Comparer à la dichotomie, qui demande 40 étapes pour 10^{-12}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Extremums d'une fonction périodique

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, T-périodique, non constante.

a) Montrer que f atteint un maximum et un minimum sur $[0, T]$, qui sont des extremums globaux.

b) En déduire que f' s'annule au moins deux fois par période.

c) Application : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$. Trouver les points critiques sur $[0, 2\pi[$ et le maximum.

d) Montrer que f' change de signe sur chaque période.

Exercice 15 – Dérivées des réciproques usuelles

a) Retrouver $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 1[$ par la formule de la réciproque.

b) Retrouver $\operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

c) Étudier la dérivabilité de $\arcsin$ en 1 : que devient la tangente ?

d) Soit $f(x) = x + \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$, calculer $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})'(1 + \mathrm{e})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).