Plaquette 3 – Rolle et accroissements finis : applications

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Rolle sert à **localiser et compter** des zéros : entre deux zéros de f il y a un zéro de f', donc f a au plus un zéro de plus que f'. Les **accroissements finis** transforment une information sur f' en information sur f : inégalités ($|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$), encadrements de sommes ($\ln(n+1)-\ln n$ entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$), limites ($f(x+1)-f(x) = f'(c_x)$). Pour démontrer une égalité faisant intervenir un c inconnu, on construit une **fonction auxiliaire** qui prend la même valeur aux deux bornes, puis on applique Rolle.

Exercice 1 – Rolle à l'infini

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Si f est constante, conclure. Sinon, soit x_0 avec $f(x_0) \neq \ell$, disons $f(x_0) > \ell$. Montrer qu'il existe $a < x_0 < b$ tels que $f(a) = f(b)$ (TVI de chaque côté).

b) En déduire qu'il existe c tel que $f'(c) = 0$.

c) Application : montrer que la dérivée de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ s'annule, et trouver où.

d) Le résultat reste-t-il vrai si les limites sont $+\infty$ des deux côtés ? Si elles sont différentes ?

Exercice 2 – Polynômes scindés et dérivée

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \ge 2$, **scindé sur** $\mathbb{R}$: $P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{m_i}$ avec $a_1 < \cdots < a_p$ et $\sum m_i = n$.

a) Montrer que a_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$ (au moins).

b) Montrer que P' a au moins une racine dans chaque $]a_i, a_{i+1}[$.

c) En comptant, montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

d) Application : montrer que $x^4 - 6x^2 + 5$ est scindé puis que les racines de sa dérivée s'intercalent, et les vérifier.

Exercice 3 – Théorème de Darboux

Soit f dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) < 0 < f'(b)$.

a) Montrer que f atteint son minimum sur $[a,b]$ en un point c.

b) Montrer que $c \neq a$ (utiliser $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a) < 0$) et $c \neq b$.

c) En déduire $f'(c) = 0$. Généraliser : f' prend toute valeur entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

d) En déduire que la fonction signe (ou toute fonction avec un saut) n'est la dérivée d'aucune fonction.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Encadrement de ln et constante d'Euler

a) Par les accroissements finis sur $[n, n+1]$, montrer que $\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n}$.

b) En déduire que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln n$.

c) Montrer que $u_n = H_n - \ln n$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une constante γ.

d) Calculer u_{1000} ($H_{1000} \approx 7{,}48547$) et en déduire une valeur approchée de γ.

Exercice 5 – Limites par les accroissements finis

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^2(\arctan(x+1) - \arctan x)$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) x^{2/3}$.

c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) \to \ell$ en $+\infty$. Montrer que $f(x+1) - f(x) \to \ell$ et que $\frac{f(x)}{x} \to \ell$.

d) Contrôler a) pour $x = 100$ ($\approx 0{,}990$).

Exercice 6 – Dérivée bornée et lipschitzianité

a) Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I avec $|f'| \le k$, alors f est k-lipschitzienne.

b) Réciproquement, montrer qu'une fonction dérivable et k-lipschitzienne vérifie $|f'| \le k$.

c) Montrer que $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $\sqrt{\cdot}$, uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, n'a pas de dérivée bornée sur $]0, 1]$: la réciproque « uniformément continue $\Rightarrow$ dérivée bornée » est fausse.

Exercice 7 – Nombre de racines par Rolle

a) Montrer que si f est dérivable et f' a au plus k zéros sur un intervalle, alors f en a au plus $k+1$.

b) Montrer que $x^n + ax + b$ ($n \ge 2$) a au plus trois racines réelles, et au plus deux si n est pair.

c) Montrer que $e^x = ax^2 + bx + c$ a au plus trois solutions réelles.

d) Montrer que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ a une seule solution réelle.

Exercice 8 – Erreur d'interpolation linéaire

Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$ et L la fonction affine qui coïncide avec f en a et b. Soit $x \in]a, b[$ fixé.

a) On pose $\varphi(t) = f(t) - L(t) - K(t-a)(t-b)$, avec K choisi pour que $\varphi(x) = 0$. Combien de zéros φ a-t-elle ?

b) En déduire qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(x) - L(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

c) En déduire $|f(x) - L(x)| \le \frac{M_2 (b-a)^2}{8}$ où $M_2 = \sup |f''|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Application : on approche sin sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ par la corde. Majorer l'erreur ; comparer à l'erreur réelle maximale ($\approx 0{,}0090$).

Exercice 9 – Inégalités par les accroissements finis

a) Montrer que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.

b) Montrer que $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$ et $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$.

c) Montrer que pour $0 < a < b$: $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

d) En déduire que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 10 – Méthode de Newton pour √2

On applique la méthode de Newton à $f(x) = x^2 - 2$, avec $u_0 = 1$.

a) Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ et interpréter géométriquement.

b) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$ et que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$.

c) En déduire $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$: convergence **quadratique**.

d) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et l'erreur à chaque étape.

Exercice 11 – Lemme de Gronwall (version simple)

a) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = f$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$ (étudier $f(x)\mathrm{e}^{-x}$).

b) Soit f dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $f(0) = 0$ et $|f'| \leq k|f|$. On pose $g = f^2\mathrm{e}^{-2kx}$. Montrer que g est décroissante.

c) En déduire que $f = 0$ sur $[0, +\infty[$.

d) Interpréter : unicité de la solution de $y' = ky$, $y(0) = y_0$.

Exercice 12 – Sommes d'exponentielles

Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ réels et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls.

a) Montrer par récurrence sur n que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x}$ a au plus $n-1$ zéros réels (multiplier par $\mathrm{e}^{-\alpha_1 x}$ et dériver).

b) En déduire que les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_i x}$ sont linéairement indépendantes.

c) Résoudre $2^x + 3^x = 5^x$ (au plus combien de solutions ?).

d) Résoudre $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ et vérifier la borne.

Exercice 13 – Accroissements finis et suites

a) Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, et en déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$.

b) Montrer de même que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

d) Vérifier pour $n = 10\,000$ ($S_n \approx 198{,}54$).

Exercice 14 – Une égalité de type Rolle

Soit f continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

a) Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 1$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) + cf'(c) = 1$ (appliquer Rolle à $g(x) = xf(x) - x$).

c) Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 2c$.

d) Montrer qu'il existe $a \neq b$ dans $]0,1[$ avec $f'(a)f'(b) = 1$ (appliquer le TVI pour trouver d avec $f(d) = 1 - d$, puis les accroissements finis sur $[0,d]$ et $[d,1]$).

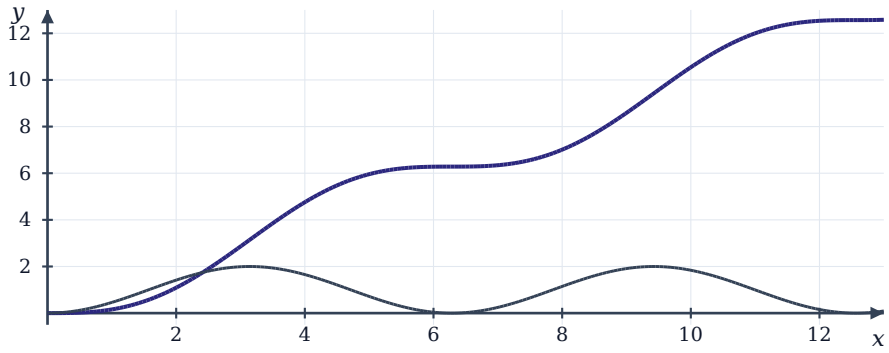
Exercice 15 – Monotonie stricte et dérivée

a) Montrer que $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien que sa dérivée s'annule une infinité de fois.

b) Montrer que $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et que $(x^3)'(0) = 0$: une fonction strictement croissante dérivable peut avoir une dérivée nulle.

c) Montrer que si $f' > 0$ sur un intervalle sauf en un nombre fini de points, f est strictement croissante.

d) Soit $f(x) = x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}$ ($f(0) = 0$). Montrer que $f'(0) = 1 > 0$ mais que f n'est croissante sur aucun intervalle $]-\eta,\eta[$ (étudier $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)$).



$x - \sin x$ (épaisse) et sa dérivée $1 - \cos x$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).