Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : dérivabilité

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Ces problèmes mobilisent tout le chapitre : définition par le taux d'accroissement, dérivées de composées et de réciproques, Rolle et accroissements finis, études de fonctions. Plusieurs partent d'une **situation concrète** (radar, échelle, coût de production, tir balistique) : on identifie la fonction et la variable, on traduit la question en dérivée, on résout, puis on vérifie l'**ordre de grandeur**. Les autres sont des problèmes classiques de prépa (inégalité de Landau, équations fonctionnelles dérivables, suites implicites) où l'on combine plusieurs théorèmes.

Exercice 1 – Radar tronçon

Un radar tronçon mesure qu'une voiture a parcouru 20 km en 9 minutes. La vitesse est limitée à 110 km/h.

a) Calculer la vitesse moyenne.

b) En modélisant la position $x(t)$ par une fonction dérivable, montrer qu'à un certain instant la vitesse instantanée a été exactement égale à la vitesse moyenne.

c) Le conducteur peut-il prétendre n'avoir jamais dépassé 110 km/h ?

d) Montrer de plus que la vitesse a pris toutes les valeurs entre 0 et 133 km/h si la voiture était arrêtée au départ (utiliser Darboux).

Exercice 2 – L'échelle qui glisse

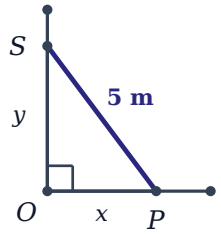
Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Son pied glisse en s'éloignant du mur à la vitesse constante de 1 m/s. On note $x(t)$ la distance du pied au mur et $y(t)$ la hauteur du sommet.

a) Relier x et y et en déduire $y'(t)$ en fonction de x, y, x'.

b) Calculer la vitesse de descente du sommet quand $x = 3$ m, puis quand $x = 4{,}8$ m.

c) Que se passe-t-il quand $x \to 5$? Commenter la validité du modèle.

d) Calculer l'accélération y'' quand $x = 3$.



L'échelle contre le mur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Coût moyen et coût marginal

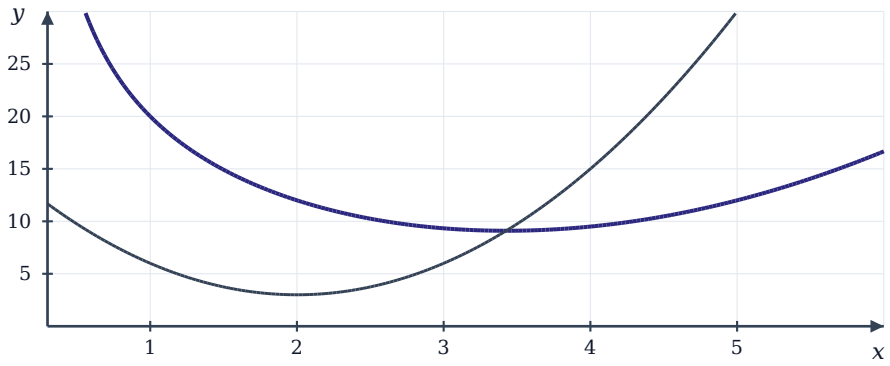
Le coût de production de q milliers d'objets est $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$ (en milliers d'euros), $q > 0$.

a) Calculer le coût marginal $C'(q)$ et montrer qu'il est minimal en $q = 2$.

b) Soit $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ le coût moyen. Montrer que $C_M'(q) = 0 \Leftrightarrow C'(q) = C_M(q)$.

c) Montrer que C_M est minimal en l'unique racine q_0 de $q^3 - 3q^2 - 5 = 0$; encadrer q_0 à 10^{-2} près.

d) Vérifier numériquement que $C'(q_0) = C_M(q_0)$.



Coût moyen (épais) et coût marginal

Exercice 4 – Inégalité de Landau-Kolmogorov

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec $|f| \le M_0$ et $|f''| \le M_2$ ($M_0, M_2 > 0$).

a) Par Taylor-Lagrange en $x \pm h$, montrer que
$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}(f''(\xi_1) - f''(\xi_2))$.

b) En déduire $|f'(x)| \le \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$ pour tout $h > 0$.

c) Optimiser en h : montrer que $|f'| \le \sqrt{2M_0M_2}$.

d) Vérifier sur $f = \sin$ et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation différentielle non linéaire f′ = f²

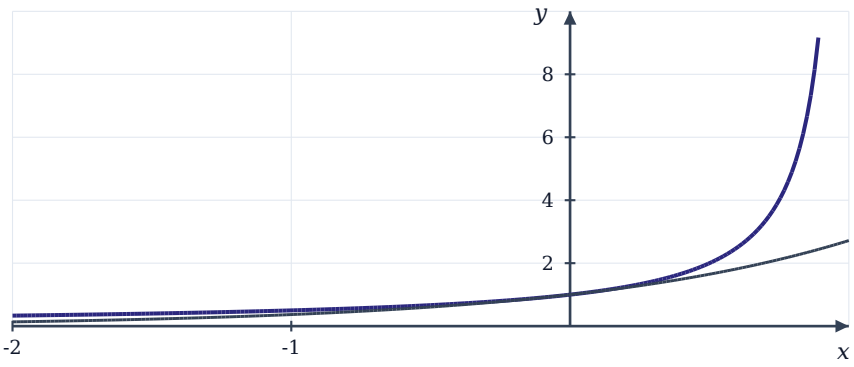
On cherche les fonctions f dérivables sur un intervalle I contenant 0, avec $f' = f^2$ et $f(0) = 1$.

a) Montrer que f ne s'annule pas sur I (sinon, considérer le premier zéro et l'unicité pour $y' = y^2$, $y(x_0) = 0$ — admise).

b) Montrer que $\left(\frac{1}{f}\right)' = -1$ et en déduire $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

c) Quel est le plus grand intervalle I possible ? Commenter (« explosion en temps fini »).

d) Comparer avec $g' = g$, $g(0) = 1$: la solution est-elle définie sur $\mathbb{R}$?



1/(1 − x) (épaisse) et e^x

Exercice 6 – Dérivation numérique

On approche $f'(x)$ par $D_1(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ou $D_2(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

a) Avec Taylor-Lagrange (ordre 2), montrer $|D_1(h) - f'(x)| \le \frac{M_2 h}{2}$.

b) Avec Taylor-Lagrange à l'ordre 3, montrer $|D_2(h) - f'(x)| \le \frac{M_3 h^2}{6}$.

c) Calculer $D_1(0{,}01)$ et $D_2(0{,}01)$ pour $f = \sin$ en $x = 1$; comparer les erreurs.

d) Montrer que $D_2(h)$ peut avoir une limite sans que f soit dérivable (exemple $|x|$ en 0).

Exercice 7 – Suite implicite x + ln x = n

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ a une unique solution $x_n > 0$.

b) Montrer que (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $x_n \sim n$ (écrire $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln x_n}{n}$ et encadrer).

d) Montrer que $x_n = n - \ln n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$. Vérifier pour $n = 100$ ($x_{100} \approx 95{,}4415$).

Exercice 8 – Dérivabilité et suites

a) Montrer que si f est dérivable en a, alors $n\left(f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)\right) \to f'(a)$.

b) Montrer que la réciproque est fausse avec $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ en $a = 0$.

c) Montrer que si f est dérivable en a et $u_n, v_n \to a$ avec $u_n < a < v_n$, alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} \to f'(a)$.

d) Le résultat c) reste-t-il vrai sans l'hypothèse « a entre u_n et v_n » ? Tester $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ ($f(0)=0$) en $a=0$, avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $u_n = x_n - x_n^3$, $v_n = x_n + x_n^3$.

Exercice 9 – Portée d'un tir

Un projectile est lancé depuis le sol avec une vitesse v_0 et un angle $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sans frottement, sa portée est $R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ et sa hauteur maximale $H(\theta) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$.

a) Pour quel angle la portée est-elle maximale ? Calculer $R_{\max}$ pour $v_0 = 20$ m/s, $g = 9{,}8$ m/s².

b) Montrer que deux angles complémentaires donnent la même portée.

c) Calculer $R'(\theta)$ et estimer la perte de portée si l'on tire à 50° au lieu de 45° (approximation affine, puis valeur exacte).

d) Pour quel angle la portée est-elle égale à quatre fois la hauteur maximale ?

Exercice 10 – Inégalité de Huygens

On veut montrer que $2\sin x + \tan x \geq 3x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Soit $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. Calculer $f'(x)$ en fonction de $c = \cos x$.

b) Montrer que $2c + \frac{1}{c^2} \geq 3$ pour $c \in]0,1]$ (étudier $\psi(c) = 2c + c^{-2}$, ou utiliser l'inégalité arithmético-géométrique).

c) Conclure.

d) Interpréter pour le calcul de π : avec $x = \frac{\pi}{n}$, comparer $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{2\sin\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n}}{3}$; calculer pour $n = 6$.

Exercice 11 – Équation fonctionnelle et dérivation

On cherche les f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ pour tous x, y.

a) Calculer $f(0)$.

b) Dériver par rapport à y puis prendre $y = 0$: montrer que $f'(x) = f'(0) + 2x$.

c) En déduire f et vérifier.

d) Même méthode pour $f(x+y) = f(x)f(y)$ avec f dérivable et $f(0) = 1$: retrouver $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 12 – Deux zéros de la dérivée

Soit f dérivable sur $[a,b]$ avec $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$.

a) Montrer que f prend une valeur > 0 près de a et une valeur < 0 près de b.

b) En déduire que f s'annule en un point $c \in]a,b[$.

c) Montrer que f' s'annule au moins deux fois sur $]a,b[$.

d) Exemple : $f(x) = x(x-1)(x-2)$ sur $[0,2]$. Vérifier les hypothèses, trouver c et les zéros de f'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Une fonction non dérivable par morceaux

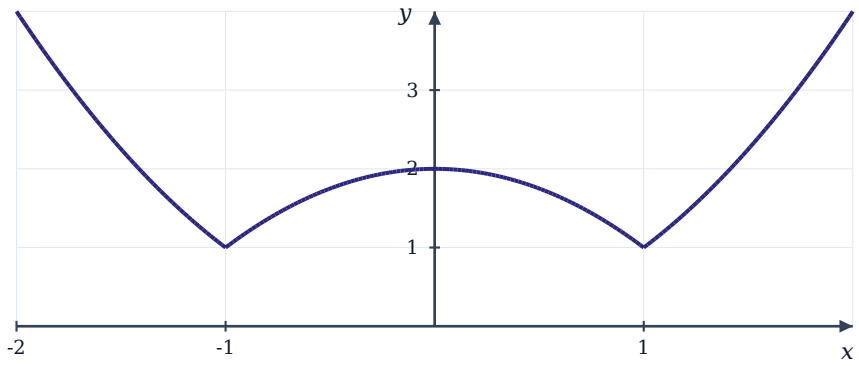
Soit $f(x) = \max(x^2, 2 - x^2)$.

a) Déterminer f explicitement et tracer son allure.

b) Étudier la dérivabilité de f en ± 1 (dérivées à gauche et à droite).

c) Déterminer le minimum de f et où il est atteint. Le minimum est-il en un point critique ?

d) Généraliser : si g, h sont dérivables et $g(a) = h(a)$ avec $g'(a) \neq h'(a)$, $\max(g, h)$ est-elle dérivable en a ?



La courbe de max(x², 2 − x²)

Exercice 14 – Dérivée d'une fonction définie par un produit

Soit $f(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + kx)$.

a) Calculer $f'(0)$ par la dérivée logarithmique.

b) Calculer $f''(0)$ (dériver $\frac{f'}{f} = \sum \frac{k}{1+kx}$ une seconde fois).

c) En déduire le coefficient de x^2 dans le développement de f, et vérifier pour $n = 3$.

d) Donner une interprétation combinatoire de ce coefficient.

Exercice 15 – Taux de variation d'une aire

Une tache d'huile circulaire s'étend : son rayon croît à la vitesse constante de 2 cm/s.

a) À quelle vitesse l'aire croît-elle quand le rayon vaut 10 cm ? 50 cm ?

b) Le même problème avec un rayon qui croît comme $r(t) = \sqrt{t}$: montrer que l'aire croît alors à vitesse constante.

c) Un ballon sphérique est gonflé à 100 cm³/s. À quelle vitesse croît son rayon quand $r = 10$ cm ?

d) Même question pour la surface du ballon.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).