Plaquette 1 – Taux de variation, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Dérivabilité — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On revient à la **définition** de la dérivée pour étudier la dérivabilité en un point, on dérive des composées, on applique **Rolle** et l'**égalité des accroissements finis** (EAF) pour démontrer des inégalités et compter des racines.

Exercice 1 – Dérivabilité par la définition

Soit $f(x) = x^2$. Calculer $f'(3)$ en revenant à la définition.

Exercice 2 – Non-dérivabilité

Soit $f(x) = |x|$.

a) Calculer les dérivées à gauche et à droite en 0.

b) f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle continue ?

Exercice 3 – Tangente verticale

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Étudier la dérivabilité en 0.

Exercice 4 – Dérivées de composées

Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

b) $g(x) = \sin(3x^2)$

c) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$

Exercice 5 – Dérivabilité d'une fonction par morceaux

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – Théorème de Rolle

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}]$.

a) Vérifier les hypothèses de Rolle.

b) Déterminer les valeurs de c données par le théorème.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Égalité des accroissements finis

Soit $f(x) = x^2$ sur $[1\,;4]$. Déterminer le réel c donné par l'EAF.

Exercice 8 – Inégalité des accroissements finis

Montrer que pour tous réels a et b : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Exercice 9 – Inégalité par étude de fonction

Démontrer que pour tout $x > 0$: $\ln(1 + x) < x$.

Exercice 10 – Compter les racines

Montrer que l'équation $x^3 - 6x + 2 = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

Exercice 11 – Extremum et dérivée nulle

a) Si f admet un extremum local en un point intérieur c où elle est dérivable, que vaut $f'(c)$?

b) La réciproque est-elle vraie ? Donner un contre-exemple.

Exercice 12 – Dérivée et bijection

Soit $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Exercice 13 – Synthèse : Rolle appliqué

Soit P un polynôme de degré 3 admettant trois racines réelles distinctes $a < b < c$.

Montrer que P' admet exactement deux racines réelles, situées dans $]a\,;b[$ et $]b\,;c[$.

Exercice 14 – Dérivable mais pas de classe C¹

Soit $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a) Montrer que f est continue et dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

c) Montrer que f' n'a pas de limite en 0 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe C^1.

d) Montrer en revanche que $g(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ ($g(0) = 0$) est de classe C^1.

Exercice 15 – Règle de L'Hôpital par Cauchy

Soient f, g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, avec g' qui ne s'annule pas.

a) Appliquer Rolle à $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ pour obtenir $c \in]a, b[$ avec $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (accroissements finis généralisés). Pourquoi $g(b) \neq g(a)$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire la règle de L'Hôpital : si $f(a) = g(a) = 0$ et $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ quand $x \to a^+$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell$.

c) Application : calculer $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ (appliquer la règle trois fois).

d) Montrer par l'exemple $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$ que la réciproque est fausse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).