Plaquette 1 – Calcul de déterminants, Vandermonde et formules de Cramer

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés fondamentales.

— Le déterminant est n**-linéaire alterné** par rapport aux colonnes (et aux lignes).
— Un déterminant ayant **deux colonnes égales** (ou proportionnelles) est **nul**.
— $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ **ne change pas** le déterminant.
— $L_i \leftrightarrow L_j$ **change le signe**. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ **multiplie par** λ.
— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ pour $A \in M_n$.

Calculs.

— **Ordre 2** : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
— **Ordre 3 (règle de Sarrus)** :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

— **Développement selon la ligne** i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

où Δ_{ij} est le mineur obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.

— **Triangulaire** : le déterminant est le **produit des coefficients diagonaux**.

Théorèmes.

— $\det(AB) = \det A \times \det B$ et $\det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det A$.
— A est **inversible** $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.
— Une famille de n vecteurs de K^n est une **base** si et seulement si son déterminant est non nul.
— **Formules de Cramer** : si $\det A \neq 0$, la solution de $AX = B$ est $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, où A_i est A dont la i-ième colonne est remplacée par B.
— **Vandermonde** :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

— **Interprétation géométrique** : en dimension 2 le déterminant est l'**aire orientée** du parallélogramme, en dimension 3 le **volume orienté** du parallélépipède.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 1 – Déterminants d'ordre 2 et 3

a) $3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2$.

b) **Développement selon la première colonne** (qui contient un zéro) :

$$1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

— Premier mineur : $0 - 24 = -24$. Second : $8 - 3 = 5$.

— Attention aux signes : la position $(3, 1)$ a le signe $(-1)^{3+1} = +$.

— Total : $1 \times (-24) + 5 \times 5 = -24 + 25 = 1$.

— **Contrôle par Sarrus** : $0 + 40 + 0 - 15 - 24 - 0 = 1$ ✓

— **Stratégie** : développer selon la ligne ou la colonne comportant **le plus de zéros**.

Réponse. a) 2 · b) 1.

Correction de l'exercice 2 – Opérations élémentaires

On crée des zéros dans la première colonne, **sans changer** la valeur du déterminant.

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $(0, 1, 3)$.

— $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0, 2, 8)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

— **Contrôle par Vandermonde** avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$:
$(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 1 \times 2 \times 1 = 2$ ✓

— **Leçon** : les opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sont **gratuites** — elles n'altèrent pas le déterminant et simplifient énormément le calcul.

Réponse. 2.

Correction de l'exercice 3 – Déterminant triangulaire

La matrice est **triangulaire supérieure**.

— Le déterminant est le **produit des coefficients diagonaux** :

$$2 \times 3 \times (-1) \times 5 = -30$$

— **Justification** : en développant successivement selon la première colonne, seul le coefficient diagonal survit à chaque étape.

— **Conséquence** : cette matrice est **inversible** puisque $-30 \neq 0$.

— **Méthode générale** : rendre une matrice triangulaire par le pivot de Gauss est le moyen le plus efficace de calculer un déterminant de grande taille — en comptant les échanges de lignes, qui changent le signe.

Réponse. -30.

Correction de l'exercice 4 – Déterminant et inversibilité

Astuce : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ fait apparaître un facteur commun.

— La première colonne devient $(m + 2,\ m + 2,\ m + 2)$, donc on factorise $m + 2$:

$$\det A = (m + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2$$

— **Inversibilité** : $\det A \neq 0$ si et seulement si $m \neq -2$ et $m \neq 1$.

— **Contrôle** avec $m = 0$: la formule donne $2 \times 1 = 2$; par Sarrus, $0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$ ✓

— **Cohérence** avec le système à paramètre du chapitre précédent : ce sont exactement les valeurs critiques 1 et -2.

Réponse. $\det A = (m+2)(m-1)^2$: inversible si $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

Correction de l'exercice 5 – Déterminant de Vandermonde

— $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

— On développe selon la première colonne :

$$\begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

— On **factorise** $(b-a)$ dans la première ligne et $(c-a)$ dans la seconde :

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a))$$

— Le dernier facteur vaut $c - b$. D'où le résultat.

— **Contrôle numérique** avec $(a, b, c) = (1, 2, 3)$: $(2-1)(3-1)(3-2) = 2$, ce qui coïncide avec l'exercice 2 ✓

— **Conséquence majeure** : le déterminant est **non nul si et seulement si a, b, c sont deux à deux distincts** — c'est ce qui garantit l'**unicité du polynôme d'interpolation**.

Réponse. Factorisation après $L_2 - L_1$ et $L_3 - L_1$.

Correction de l'exercice 6 – Formules de Cramer

— **Déterminant du système** : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$: système de Cramer.

— **Pour** x : on remplace la première colonne par le second membre,

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 - 3 = -10 \qquad x = \frac{-10}{-5} = 2$$

— **Pour** y :

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 7 = -5 \qquad y = \frac{-5}{-5} = 1$$

— **Solution** : $(x, y) = (2, 1)$.

— **Vérification** : $4 + 3 = 7$ ✓ et $2 - 1 = 1$ ✓

— **Usage raisonnable** : les formules de Cramer sont élégantes en dimension 2 ou 3, mais leur coût explose ensuite — au-delà, le pivot de Gauss est incomparablement plus

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

rapide.

Réponse. $(x, y) = (2, 1)$.

Correction de l'exercice 7 – Déterminant d'un produit

On applique les propriétés multiplicatives.

— $\det(AB) = \det A \times \det B = 2 \times (-3) = -6$.

— $\det(2A) = 2^3 \det A = 8 \times 2 = 16$ — attention, 2^n et non 2 !

— $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{2}$.

— $\det\left(A^{\mathsf{T}} B^2\right) = \det\left(A^{\mathsf{T}}\right) \times (\det B)^2 = 2 \times 9 = 18$.

— **Piège le plus fréquent** : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ en général. Par exemple avec $A = I_2$ et $B = -I_2$: $\det(A + B) = 0$ alors que $\det A + \det B = 1 + 1 = 2$.

Réponse. -6 ; 16 ; $\dfrac{1}{2}$; 18.

Correction de l'exercice 8 – Base ou famille liée

On calcule le déterminant de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

— $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$: $(0, -3, -3)$. $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $(0, 1, 1)$.

— On développe selon la première colonne :

$$1 \times \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

— Le déterminant est **nul** : la famille est **liée**, ce n'est pas une base.

— **Relation de dépendance** : les lignes obtenues $(0, -3, -3)$ et $(0, 1, 1)$ sont proportionnelles, ce qui signale $u_3 = u_2 - u_1$. Vérification : $(2 - 1,\ 1 - 2,\ 3 - 1) = (1, -1, 2)$ ✓

— **Rang** : 2 — les trois vecteurs sont coplanaires.

Réponse. Non : déterminant nul, $u_3 = u_2 - u_1$.

Correction de l'exercice 9 – Interprétation géométrique

Aire : elle vaut la valeur absolue du déterminant des deux vecteurs.

— $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$, donc l'aire est 11 unités d'aire.

— **Contrôle** : le parallélogramme est « presque » un rectangle $3 \times 4 = 12$ légèrement cisaillé — 11 est plausible.

Volume : déterminant 3×3 de la matrice des trois vecteurs.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

— La matrice est triangulaire : le déterminant vaut le produit diagonal, soit 1.

— **Volume** : 1 unité de volume.

— **Interprétation** : le solide est un cisaillement du cube unité — et **le cisaillement conserve le volume**, exactement comme l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ conserve le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

déterminant.

Réponse. Aire 11 ; volume 1.

Correction de l'exercice 10 – Comatrice

— **Déterminant** : $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$.

— **Comatrice** : $\mathrm{com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où le mineur d'une matrice 2×2 est le coefficient « opposé ».

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Formule** : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\mathrm{com}(A)^{\mathsf{T}} = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

— **Vérification** : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2$ ✓

— **Portée** : la formule $A \times \mathrm{com}(A)^{\mathsf{T}} = (\det A) I_n$ vaut en toute dimension, mais elle n'est utilisable en pratique que pour $n \leq 3$.

Réponse. $\det A = -2$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 – Déterminant par blocs

La matrice est **triangulaire par blocs** :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

— **Propriété** : $\det M = \det A \times \det D$ (le bloc C n'intervient pas).

— $\det A = 6 - 1 = 5$ et $\det D = 12 - 2 = 10$.

— **Résultat** : $\det M = 5 \times 10 = 50$.

— **Justification rapide** : en développant selon les deux premières lignes (qui n'ont de coefficients non nuls que dans les deux premières colonnes), on retrouve exactement ce produit.

— **Attention** : la formule vaut pour un bloc **triangulaire** ; pour une matrice par blocs quelconque, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ en général.

Réponse. 50.

Correction de l'exercice 12 – Un déterminant d'ordre 4 par le pivot

Les opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$ ($i \neq 1$) **ne changent pas** le déterminant. On annule la première colonne sous le pivot 1 :

— $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$: $(0, 1, -6, 5)$;

— $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$: $(0, 2, 3, -1)$;

— $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$: $(0, 1, -3, 3)$.

On développe selon la première colonne (un seul terme non nul, de signe +) :

$$\Delta = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

— Même méthode : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $(0, 15, -11)$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $(0, 3, -2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\Delta = \begin{vmatrix} 15 & -11 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 15 \times (-2) - (-11) \times 3 = -30 + 33 = 3.$

— **Réflexe** : on choisit un pivot égal à 1 pour éviter les fractions, et l'on ne fait **que** des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ tant que possible (un échange change le signe, une multiplication de ligne multiplie le déterminant).

Réponse. $\Delta = 3$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices antisymétriques d'ordre impair

a) Deux propriétés du cours : $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Donc

$$\det A = \det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

— Si n est impair, $\det A = -\det A$, donc $2\det A = 0$ et $\det A = 0$: A n'est pas inversible.

b) Sarrus :
$0 \cdot 0 \cdot 0 + a \cdot c \cdot (-b) + b \cdot (-a) \cdot (-c) - b \cdot 0 \cdot (-b) - a \cdot (-a) \cdot 0 - 0 \cdot c \cdot (-c) = -abc + abc = 0.$

— Noyau : $v = (c, -b, a)$ convient, car $Av = (-ab + ab,\ -ac + ac,\ -bc + bc) = 0$; il est non nul dès que $A \neq 0$.

c) Non : $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2$, non nul si $a \neq 0$. En dimension paire, une matrice antisymétrique peut être inversible (c'est le cas du quart de tour).

Réponse. $\det A = (-1)^n \det A$, donc $\det A = 0$ pour n impair ; noyau $\ni (c, -b, a)$; pour $n = 2$: a^2.

Correction de l'exercice 14 – Aire d'un triangle et alignement

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 4)$. Le déterminant de deux vecteurs du plan est l'**aire orientée** du parallélogramme qu'ils forment :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$$

— Le triangle est la moitié du parallélogramme : aire $= \frac{11}{2} = 5{,}5$ unités d'aire.

b) Le déterminant est **positif** : on tourne de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$ dans le sens trigonométrique. Le triangle ABC est parcouru dans le sens direct.

c) A, B, M sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul :

— $\overrightarrow{AM} = (m - 1, 2)$ et $\begin{vmatrix} 3 & m-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (m - 1) = 7 - m.$

— Alignement pour $m = 7$. Contrôle : la droite (AB) a pour pente $\frac{1}{3}$, et de $A(1, 1)$ à $M(7, 3)$ on monte de 2 pour 6.

Réponse. det = 11, aire 5,5 ; sens direct ; $m = 7$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : déterminant à paramètre

a) **Opération** $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$: la première colonne devient constante égale à $x + 2$.

$$D(x) = (x + 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

— Puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$$

— **Contrôle en** $x = 0$: $D(0) = 2$; par Sarrus, $0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$ ✓
— **Contrôle en** $x = 2$: la formule donne $4 \times 1 = 4$; par Sarrus, $8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 4$ ✓

b) Le système homogène $AX = 0$ a des solutions non nulles si et seulement si A n'est **pas inversible**, c'est-à-dire $D(x) = 0$.

— Donc $x = -2$ ou $x = 1$.
— **Pour** $x = 1$: la matrice est pleine de 1, de rang 1 ; le noyau est le **plan** $x + y + z = 0$, de dimension 2.
— **Pour** $x = -2$: le rang est 2 et le noyau est la **droite** $\mathrm{Vect}(1, 1, 1)$ — en effet $-2 + 1 + 1 = 0$ sur chaque ligne ✓

Réponse. a) $D(x) = (x+2)(x-1)^2$ · b) $x = 1$ ou $x = -2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).