Plaquette 2 – Calculer un déterminant : opérations, factorisations, récurrences

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Techniques de calcul.

— $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ ($k \neq j$) : déterminant **inchangé** ; échange de deux colonnes : **opposé** ; $C_j \leftarrow \lambda C_j$: multiplié par λ (idem sur les lignes).

— **Facteur commun** : si toutes les lignes ont la même somme s, $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$ fait apparaître la colonne $(s, \ldots, s)$ et l'on factorise s.

— **Développement** selon la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

— **Triangulaire (par blocs)** :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \times \det D$$

— **Vandermonde** : $\det\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

— **Récurrence** : pour une matrice tridiagonale (b, a, c), le développement donne $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$.

— **Parité** : pour une matrice à coefficients entiers, $\det A \equiv \det \overline{A} \pmod 2$, où $\overline{A}$ est la matrice réduite modulo 2.

Correction de l'exercice 1 – Déterminant à paramètre et inversibilité

a) Développement selon la première ligne :

$$\det A_m = 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (5m - 1) - 2(2m - 1) + 3(2 - 5)$$

— $\det A_m = 5m - 1 - 4m + 2 - 9 = m - 8$.

— Vérification : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $(0, 1, -5)$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $(0, -1, m-3)$, puis $\det = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & m-3 \end{vmatrix} = m - 3 - 5 = m - 8$.

b) A_m est inversible si et seulement si $\det A_m \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq 8$.

c) Pour $m = 8$, on cherche $L_3 = \alpha L_1 + \beta L_2$: les deux premières colonnes donnent $\alpha + 2\beta = 1$ et $2\alpha + 5\beta = 1$, d'où $\beta = -1$, $\alpha = 3$. Troisième colonne : $3 \times 3 - 1 = 8$. Donc $L_3 = 3L_1 - L_2$.

Réponse. $\det A_m = m - 8$; inversible ssi $m \neq 8$; pour $m = 8$: $L_3 = 3L_1 - L_2$.

Correction de l'exercice 2 – Déterminant circulant d'ordre 3

a) Chaque ligne a pour somme $s = a + b + c$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ne change pas le déterminant et remplace la première colonne par (s, s, s) ; par linéarité en la première colonne :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\Delta = s\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & a & b\\ 1 & c & a\end{vmatrix}$$

b) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent les lignes $(0, a-b, b-c)$ et $(0, c-b, a-c)$:

— $\Delta = s[(a-b)(a-c) - (b-c)(c-b)] = s[a^2 - ac - ab + bc + (b-c)^2]$;

— $(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$, donc le crochet vaut $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

c) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$, nul si et seulement si $a = b = c$. Si $a, b, c \geq 0$, les deux facteurs sont positifs. Et $\Delta = 0$ si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

— Contrôle : $a = 1$, $b = c = 0$ donne $\Delta = 1 = 1 \times 1$ (matrice identité).

Réponse.
$\Delta = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{a+b+c}{2}\Big[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\Big]$.

Correction de l'exercice 3 – Diagonale x, ailleurs des 1

a) $D_2 = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Par Sarrus,
$D_3 = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$.

b) Toutes les lignes ont la même somme $x + n - 1$. On fait $C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_n$ et l'on factorise :

$$D_n(x) = (x+n-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & x & \cdots & 1\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

— Puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$: la ligne i devient $(0, \ldots, 0, x-1, 0, \ldots, 0)$ (le $x-1$ en position i). Le déterminant est triangulaire supérieur, de diagonale $1, x-1, \ldots, x-1$.

— $D_n(x) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$. Contrôle avec a) pour $n = 2, 3$.

c) Non inversible pour $x = 1$ ou $x = 1 - n$.

— $x = 1$: la matrice est J (que des 1), de rang 1 ; noyau : l'hyperplan $x_1 + \ldots + x_n = 0$.

— $x = 1 - n$: chaque ligne a une somme nulle, donc $(1, \ldots, 1)$ est dans le noyau ; la matrice vaut $J - nI_n$, de noyau Vect$(1, \ldots, 1)$.

Réponse. $D_n(x) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$; non inversible pour $x = 1$ (noyau : hyperplan somme nulle) ou $x = 1 - n$ (noyau Vect$(1, \ldots, 1)$).

Correction de l'exercice 4 – Le déterminant tridiagonal (−1, 2, −1)

a) $D_1 = 2$, $D_2 = 4 - 1 = 3$, $D_3 = 2 \times 3 - (-1) \times \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$.

b) Développement selon la première ligne, qui a deux termes non nuls :

$$D_n = 2D_{n-1} - (-1)\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & \cdots\\ 0 & 2 & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \end{vmatrix}$$

— Le second mineur a une première colonne réduite à -1 en tête : en le développant selon sa première colonne, il vaut $-1 \times D_{n-2}$.

— Donc $D_n = 2D_{n-1} + (-1)D_{n-2} = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

c) La relation $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$ montre que (D_n) est **arithmétique**, de raison

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$D_2 - D_1 = 1$. Donc $D_n = n + 1$ (et $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$ concordent).

d) $D_n = n + 1 \neq 0$: la matrice est toujours inversible, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution discrète du problème $-u'' = f$, $u(0) = u(1) = 0$.

Réponse. $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$; $D_n = n + 1$; toujours inversible.

Correction de l'exercice 5 – Matrice des minimums

a) $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $L_3 - L_2$ et $L_2 - L_1$ donnent les lignes $(0, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$: matrice triangulaire de déterminant 1.

b) La ligne i de M_n est $(1, 2, \ldots, i-1, i, i, \ldots, i)$, et la ligne $i - 1$ est $(1, 2, \ldots, i-1, i-1, \ldots, i-1)$. Leur différence est

$$L_i - L_{i-1} = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1) \qquad \text{(premier 1 en position } i\text{)}$$

— En opérant de $i = n$ à $i = 2$ (pour utiliser à chaque fois des lignes non encore modifiées), on obtient une matrice triangulaire supérieure à diagonale de 1, sans changer le déterminant : $\det M_n = 1$.

c) $(LL^{\mathsf{T}})_{ij} = \sum_k L_{ik} L_{jk}$, où $L_{ik} = 1$ si $k \leq i$ et 0 sinon. Le terme vaut 1 exactement pour $k \leq \min(i, j)$, donc $(LL^{\mathsf{T}})_{ij} = \min(i, j)$.

— Contrôle : $\det M_n = \det L \times \det L^{\mathsf{T}} = 1 \times 1 = 1$.

Réponse. $\det M_n = 1$; $M_n = LL^{\mathsf{T}}$ avec L triangulaire inférieure de 1.

Correction de l'exercice 6 – La matrice des distances |i − j|

a) $\det A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Sarrus : $0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 0 = 4$.

b) $|i - j| - |i + 1 - j|$ vaut -1 si $j \leq i$ et $+1$ si $j \geq i + 1$. La ligne i ($i \leq n - 1$) devient $(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1)$ (i fois -1). La dernière ligne reste $(n - 1, n - 2, \ldots, 1, 0)$.

c) Pour $i \leq n - 2$, la différence de deux lignes consécutives obtenues en b) vaut 0 partout sauf en colonne $i + 1$, où elle vaut $1 - (-1) = 2$. On obtient :

— lignes 1 à $n - 2$: $2e_{i+1}$; ligne $n - 1$: $(-1, \ldots, -1, 1)$; ligne n : $(n - 1, \ldots, 1, 0)$.

— On place la colonne 1 juste avant la colonne n ($n - 2$ transpositions, signe $(-1)^{n-2}$) : la matrice devient triangulaire par blocs, avec $2I_{n-2}$ en haut à gauche et en bas à droite le bloc (colonnes 1 et n d'origine)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de déterminant } -(n-1)$$

— $\det A_n = (-1)^{n-2} \times 2^{n-2} \times (-(n-1)) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

d) $n = 4$: $(-1)^3 \times 3 \times 4 = -12$. (Et $n = 3$: $2 \times 2 = 4$, $n = 2$: -1, conformes à a).)

Réponse. $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$: $-1, 4, -12, 32, \ldots$

Correction de l'exercice 7 – Vandermonde en pratique

a) La colonne j est $(x_j^0, x_j^1, x_j^2, x_j^3)$ avec $x = (1, 2, 3, 4)$: c'est la transposée d'une matrice de Vandermonde (même déterminant). Donc

$$V = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i) = (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1 = 12$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On écrit $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ dans la troisième colonne ; l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ la remplace par $(2\cos^2 a, 2\cos^2 b, 2\cos^2 c)$, et l'on factorise 2 :

— $\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos^2 a \\ 1 & \cos b & \cos^2 b \\ 1 & \cos c & \cos^2 c \end{vmatrix}$, déterminant de Vandermonde en $(\cos a, \cos b, \cos c)$;

— $\Delta = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$.

c) L'interpolation revient au système de matrice ci-dessus en (α, β, γ) : possible et unique si et seulement si $\Delta \neq 0$, c'est-à-dire si $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ sont **deux à deux distincts**. (Par exemple $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$, $c = \pi$ conviennent ; a et $-a$ jamais ensemble.)

Réponse. $V = 12$; $\Delta = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$; condition : cosinus deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 8 – Déterminant en flèche

a) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_1a_2 - a_1 - a_2$ (Sarrus : $a_0a_1a_2 + 0 + 0 - a_1 - 0 - a_2$).

b) L'opération ajoute à la première colonne une combinaison des autres : déterminant **inchangé**. Pour $k \geq 1$, la ligne $k+1$ n'a que deux coefficients non nuls, 1 en colonne 1 et a_k en colonne $k+1$; son nouveau premier coefficient est $1 - \frac{1}{a_k}a_k = 0$. Le premier coefficient de la ligne 1 devient $a_0 - \sum_k \frac{1}{a_k}$.

— La matrice est alors triangulaire supérieure, de diagonale $\left(a_0 - \sum \frac{1}{a_k}, a_1, \ldots, a_n\right)$:

$$\Delta = a_1 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right)$$

— Contrôle avec a) : $a_1a_2\left(a_0 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) = a_0a_1a_2 - a_2 - a_1$.

c) $\Delta = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

Réponse. $\Delta = a_1 \cdots a_n\left(a_0 - \sum \frac{1}{a_k}\right)$; c) $a_0 = \frac{11}{6}$.

Correction de l'exercice 9 – Fibonacci caché dans un déterminant

a) $F_1 = 1$; $F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$; $F_3 = 1 \times F_2 - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$.

b) Pour une tridiagonale de diagonale a, sur-diagonale c, sous-diagonale b, le développement selon la première ligne donne

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

— Ici $a = 1$, $bc = (-1) \times 1 = -1$: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

c) $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ et la relation de Fibonacci : $(F_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, décalage d'un rang de la suite $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$. Donc $F_6 = 13$.

d) Avec $bc = 1$: $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_1 = 1$, $D_2 = 0$. La suite est $1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, périodique de période 6 (les racines de $r^2 = r - 1$ sont des racines sixièmes de l'unité).

Réponse. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$; $F_6 = 13$; avec $+1$: suite périodique $1, 0, -1, -1, 0, 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Coefficients binomiaux

a) $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $L_3 - L_2 = (0,1,3)$, $L_2 - L_1 = (0,1,2)$; $\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

b) Après $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ($i \geq 1$, en décroissant pour utiliser les lignes d'origine), le coefficient (i,j) devient, par la formule de Pascal,

$$\binom{i+j}{i} - \binom{i-1+j}{i-1} = \binom{i+j-1}{i}$$

— qui est nul pour $j = 0$ et $i \geq 1$. La première colonne devient $(1,0,\ldots,0)$, et la première ligne reste $(1,1,\ldots,1)$. En développant selon la première colonne, $\det P_n$ est le déterminant de la matrice $\left(\binom{i+j-1}{i}\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}$.

— Puis $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ (j décroissant, $j \geq 2$) : $\binom{i+j-1}{i} - \binom{i+j-2}{i} = \binom{i+j-2}{i-1}$, soit, en posant $i' = i-1$, $j' = j-1$, le coefficient $\binom{i'+j'}{i'}$: on reconnaît P_{n-1} (la première colonne $\binom{i}{i} = 1$ n'est pas modifiée).

c) Donc $\det P_n = \det P_{n-1} = \ldots = \det P_1 = 1$. (Plus conceptuellement, $P_n = LL^{\mathsf{T}}$ avec $L = \left(\binom{i}{j}\right)$ triangulaire à diagonale de 1.)

Réponse. $\det P_n = \det P_{n-1} = \ldots = 1$.

Correction de l'exercice 11 – Déterminant triangulaire par blocs

a) La matrice est triangulaire par blocs, avec des blocs diagonaux 2×2 :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2-1)(6-4) = 2$$

b) On échange $C_1 \leftrightarrow C_3$ et $C_2 \leftrightarrow C_4$: deux transpositions, le signe ne change pas. La nouvelle matrice a pour lignes $(1,2,0,0)$, $(3,4,0,0)$, $(7,8,5,6)$, $(9,9,1,1)$: triangulaire inférieure par blocs.

— $\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1) = 2$.

c) Avec des blocs 1×1, la formule proposée est exacte ($ad - bc$). Mais en taille 4, prenons $A = D = 0$ et $B = C = I_2$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ échange les coordonnées $1 \leftrightarrow 3$ et $2 \leftrightarrow 4$; c'est une permutation paire, de déterminant 1. La formule donnerait $0 - 1 \times 1 = -1$. Faux.

Réponse. a) 2 ; b) 2 ; c) contre-exemple $\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$: $1 \neq -1$.

Correction de l'exercice 12 – Circulant d'ordre 4

a) Chaque ligne a pour somme 10. $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ puis factorisation :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\Delta = 10\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

b) $L_i \leftarrow L_i - L_1$ ($i = 2, 3, 4$) : lignes $(0, 1, 1, -3)$, $(0, 2, -2, -2)$, $(0, -1, -1, -1)$.
Développement selon la première colonne :

— $\Delta = 10\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$.

— Développement selon la première ligne :
$1 \times (2 - 2) - 1 \times (-2 - 2) + (-3) \times (-2 - 2) = 0 + 4 + 12 = 16$.

— $\Delta = 160$.

Réponse. $\Delta = 10 \times 16 = 160$.

Correction de l’exercice 13 – Inversibilité par la parité

a) Le déterminant est une somme de produits de coefficients (avec des signes) : c’est un entier. Si l’on change des coefficients par des nombres de même parité, chaque produit change d’un nombre pair, donc $\det A$ garde sa parité. Autrement dit :

$$\det A \equiv \det \overline{A} \pmod 2$$

— où $\overline{A}$ est obtenue en remplaçant chaque coefficient par son reste modulo 2.

b) Modulo 2, A devient $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, de déterminant 1. Donc $\det A$ est **impair**, en particulier non nul : A est inversible.

c) Même argument : modulo 2, la matrice devient I_n, et son déterminant est impair.

d) $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1$: $(0, -9, -16)$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$: $(0, 0, -3)$. Le déterminant est triangulaire : $1 \times (-9) \times (-3) = 27$, impair.

Réponse. $\det A \equiv \det \overline{A} \pmod 2$; b) $\overline{A} = I_3$, $\det A$ impair ; d) $\det A = 27$.

Correction de l’exercice 14 – Un déterminant qui vaut 4abc

a) Pour $a = b = c = 1$: $M = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, déterminant $(2 + 2)(2 - 1)^2 = 4$ (diagonale $x = 2$, ailleurs 1). Pour $(1, 2, 3)$: $M = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$, et $\det M = 5(12 - 6) - 1(6 - 6) + 1(6 - 12) = 24$.
Les deux valeurs valent $4abc$.

b) L’opération ne change pas le déterminant. La nouvelle première ligne est

$$(b + c - b - c,\ a - c - a - c,\ a - b - a - b) = (0, -2c, -2b)$$

— Développement selon cette ligne :

$$\det M = -(-2c)\begin{vmatrix}b & b\\ c & a + b\end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix}b & c + a\\ c & c\end{vmatrix} = 2c(ab + b^2 - bc) - 2b(bc - c^2 - ac)$$

— En développant : $2abc + 2b^2c - 2bc^2 - 2b^2c + 2bc^2 + 2abc = 4abc$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) M est non inversible si et seulement si $abc = 0$. Pour $a = 0$: $M = \begin{pmatrix} b+c & 0 & 0 \\ b & c & b \\ c & c & b \end{pmatrix}$; le vecteur $(0, b, -c)$ est envoyé sur $(0,\ cb - bc,\ cb - bc) = 0$, et il est non nul dès que $(b, c) \neq (0, 0)$.

Réponse. $\det M = 4abc$; non inversible ssi $abc = 0$; pour $a = 0$: $(0, b, -c) \in \ker M$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : tridiagonale et polynômes de Tchebychev

a) Par la formule de récurrence des tridiagonales ($a = x$, $bc = 1$) : $D_n = xD_{n-1} - D_{n-2}$. La convention $D_0 = 1$ rend la formule vraie dès $n = 2$: $D_2 = x^2 - 1$.

b) Récurrence double. Pour $n = 0$: $\frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$; pour $n = 1$: $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = x$. Hérédité, avec la formule $\sin(p+\theta) + \sin(p-\theta) = 2\sin p\cos\theta$ appliquée à $p = n\theta$:

$$xD_{n-1} - D_{n-2} = \frac{2\cos\theta\sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

c) $D_n = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n+1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ (dans $]0, \pi[$). Ce sont n valeurs distinctes de $x = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$. Comme D_n est un polynôme de degré n en x (coefficient dominant 1), ce sont toutes ses racines :

— la matrice est non inversible si et seulement si $x = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$.

d) $n = 2$: $D_2 = x^2 - 1$, racines ± 1 ; et $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, $2\cos\frac{2\pi}{3} = -1$.

Réponse. $D_n = xD_{n-1} - D_{n-2}$; $D_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$; non inversible ssi $x = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).