Plaquette 5 – Déterminants en situation : polynômes, suites, systèmes

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le déterminant comme outil.

— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$; $A - \lambda I_n$ est non inversible exactement pour les racines de χ_A. En taille 2 :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A$$

— **Cayley-Hamilton** en taille 2 : $A^2 - (\mathrm{tr}A)A + (\det A)I_2 = 0$.

— **Résultant** : $P = X^2 + aX + b$ et $X - c$ ont une racine commune $\Leftrightarrow P(c) = 0$, et $P(c)$ est un déterminant de Sylvester.

— **Cramer** : $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$.

— **Suites** : si $U_{n+1} = MU_n$, alors $\det(U_{n+1}, V_{n+1}) = \det M \det(U_n, V_n)$ (en taille 2).

— **Wronskien** de deux solutions de $y'' + py' + qy = 0$ (p, q constants) :

$$W = yz' - y'z, \qquad W' = -pW$$

Correction de l'exercice 1 – Polynôme caractéristique en taille 2

a) $\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Et $\mathrm{tr}A = 4$, $\det A = 3$: conforme.

b) $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)X = 0$, qui a une solution non nulle si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible :

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 3\}$$

— $\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = 0$, solutions $\mathrm{Vect}(1, 1)$.

— $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0$, solutions $\mathrm{Vect}(1, -1)$.

c) $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$.

Réponse. $\chi_A = \lambda^2 - 4\lambda + 3$; $\lambda = 3$: $\mathrm{Vect}(1, 1)$, $\lambda = 1$: $\mathrm{Vect}(1, -1)$.

Correction de l'exercice 2 – Polynôme caractéristique en taille 3

a) $T - \lambda I_3$ est triangulaire inférieure : son déterminant est le produit des coefficients diagonaux,

$$\chi_T(\lambda) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

— les racines sont les coefficients diagonaux 2, 3, -1.

b) $A - \lambda I_3$ a $-\lambda$ sur la diagonale et 1 ailleurs. Par la formule « diagonale x, ailleurs 1 » avec $x = -\lambda$:

— $\chi_A(\lambda) = (-\lambda + 2)(-\lambda - 1)^2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$.

c) $\lambda = 2$: $A - 2I_3$ est de rang 2 (par exemple les deux premières lignes $(-2, 1, 1)$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(1,-2,1)$ sont libres) : noyau de dimension 1, Vect$(1,1,1)$.

— $\lambda=-1$: $A+I_3=J$ (que des 1), de rang 1 : noyau de dimension 2, le plan $x+y+z=0$. La racine double donne un noyau de dimension 2.

Réponse. $\chi_T=(2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)$; $\chi_A=-(\lambda-2)(\lambda+1)^2$; noyaux de dimensions 1 et 2.

Correction de l'exercice 3 – Le résultant : une racine commune ?

a) La seule racine de Q est c : racine commune $\Leftrightarrow P(c)=0$.

b) Développement selon la première ligne :

$$R=1\times((-c)(-c)-0)-a(1\times(-c)-0)+b(1-0)=c^2+ac+b=P(c)$$

c) Pour un vecteur $(r^2,r,1)$, la première ligne donne $r^2+ar+b=P(r)$, la deuxième $r^2-cr=rQ(r)$, la troisième $r-c=Q(r)$. Si r est racine commune, les trois sont nuls : la matrice a un noyau non nul, donc $R=0$. C'est l'idée du **résultant** : une racine commune crée une relation linéaire entre les colonnes.

d) $P(c)=c^2-3c+2=(c-1)(c-2)=0\Leftrightarrow c\in\{1,2\}$, les racines de P.

Réponse. $R=c^2+ac+b=P(c)$; racine commune $\Leftrightarrow R=0$; d) $c\in\{1,2\}$.

Correction de l'exercice 4 – Discriminant et résultant de P et P'

a) r est racine double de P si et seulement si $P(r)=P'(r)=0$ (caractérisation par la dérivée).

b) Développement selon la première ligne :

$$R=1\times(p^2-0)-p(2p-0)+q(4-0)=p^2-2p^2+4q=-(p^2-4q)$$

— $R=-\Delta$ où $\Delta=p^2-4q$ est le discriminant : P a une racine double $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow R=0$. Le discriminant est (au signe près) le résultant de P et P'.

c) $\Delta=m^2-16=0\Leftrightarrow m=\pm4$. Pour $m=4$: $X^2+4X+4=(X+2)^2$, racine -2 ; pour $m=-4$: $(X-2)^2$, racine 2. (La racine double est aussi la racine de P' : $-\frac{m}{2}$.)

Réponse. $R=-(p^2-4q)$; racine double ssi $\Delta=0$; $m=\pm4$, racines ∓2.

Correction de l'exercice 5 – Mélange de solutions par les formules de Cramer

a) Volume total, quantité d'alcool, contrainte d'égalité :

$$\begin{cases}x+y+z=10\\0{,}1x+0{,}3y+0{,}5z=2{,}8,\\y-z=0\end{cases}\qquad \det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\0{,}1&0{,}3&0{,}5\\0&1&-1\end{vmatrix}$$

— Développement selon la première ligne :
$1(-0{,}3-0{,}5)-1(-0{,}1-0)+1(0{,}1-0)=-0{,}8+0{,}1+0{,}1=-0{,}6\neq0$: système de Cramer.

b) On remplace chaque colonne par le second membre (10; 2,8; 0) :

— $\det A_1=\begin{vmatrix}10&1&1\\2{,}8&0{,}3&0{,}5\\0&1&-1\end{vmatrix}=10(-0{,}8)-1(-2{,}8)+1(2{,}8)=-2{,}4$, donc $x=\frac{-2{,}4}{-0{,}6}=4$;

— $\det A_2$: en développant selon la troisième ligne $(0,0,-1)$, $-1\times\begin{vmatrix}1&10\\0{,}1&2{,}8\end{vmatrix}=-1{,}8$, donc $y=3$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\det A_3$: développement selon la troisième ligne $(0,1,0)$, $-1\times\begin{vmatrix}1 & 10\\ 0{,}1 & 2{,}8\end{vmatrix}=-1{,}8$, donc $z=3$.

c) Alcool : $0{,}4+0{,}9+1{,}5=2{,}8$ L dans 10 L, soit 28 %. Volumes positifs : le mélange est réalisable.

Réponse. $\det A=-0{,}6$; $x=4$ L, $y=z=3$ L.

Correction de l'exercice 6 – Interpolation par un déterminant

a) En développant selon la première ligne, on obtient $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta y=0$, où δ est (au signe près) le déterminant de Vandermonde $V(x_1,x_2,x_3)\neq 0$ (abscisses distinctes). On peut donc écrire $y=ax^2+bx+c$. Les trois points vérifient l'équation (deux lignes égales) : c'est la parabole d'interpolation.

b) Avec les lignes $(1,0,0,1)$, $(1,1,1,3)$, $(1,2,4,7)$, on simplifie avant de développer : $L_3\leftarrow L_3-L_2$ et $L_4\leftarrow L_4-L_2$ donnent $(0,1,1,2)$ et $(0,2,4,6)$, puis $L_4\leftarrow L_4-2L_3$ donne $(0,0,2,2)$.

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & y\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

— $L_1\leftarrow L_1-L_2$ donne $(0,x,x^2,y-1)$. On développe selon la première colonne, dont le seul coefficient non nul est le 1 de la ligne 2 (signe $(-1)^{2+1}=-1$) :

$$-\begin{vmatrix}x & x^2 & y-1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-(x(2-4)-x^2(2-0)+(y-1)(2-0))=2x+2x^2-2y+2$$

— L'équation est $2x^2+2x+2-2y=0$, soit $y=x^2+x+1$. Contrôle : 1, 3, 7 en 0, 1, 2.

Réponse. $y=x^2+x+1$.

Correction de l'exercice 7 – L'identité de Cassini

a) Pour $n=1$: $M=\begin{pmatrix}F_2 & F_1\\ F_1 & F_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Si c'est vrai au rang n :

$$M^{n+1}=M^nM=\begin{pmatrix}F_{n+1}+F_n & F_{n+1}\\ F_n+F_{n-1} & F_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+1} & F_n\end{pmatrix}$$

b) $\det(M^n)=(\det M)^n=(-1)^n$, et $\det(M^n)=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2$.

c) $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$: $8\times 3-25=-1=(-1)^5$.

d) Un diviseur commun d de F_n et F_{n+1} divise $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=\pm 1$: $d=1$. (C'est une relation de Bézout explicite.)

Réponse. $M^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$; $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$; $F_n\wedge F_{n+1}=1$.

Correction de l'exercice 8 – Casoratien de deux suites récurrentes

a) u_{n+1} se recopie et $u_{n+2}=bu_n+au_{n+1}$; de même pour v :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1} & v_{n+1}\\ u_{n+2} & v_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n & v_n\\ u_{n+1} & v_{n+1}\end{pmatrix}$$

b) En prenant le déterminant : $C_{n+1}=\det M\times C_n=-bC_n$. Par récurrence, $C_n=(-b)^nC_0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) L'espace des solutions est de dimension 2 (une solution est déterminée par (w_0, w_1)). Si $C_0 \neq 0$, les vecteurs (u_0, u_1) et (v_0, v_1) sont libres, donc toute donnée initiale (w_0, w_1) en est combinaison : $w = \alpha u + \beta v$ par unicité. (u, v) est une base. (Et $C_n \neq 0$ pour tout n si $b \neq 0$.)

d) $C_n = 2^n 3^{n+1} - 2^{n+1} 3^n = 6^n(3-2) = 6^n$, et $(-b)^n C_0 = 6^n \times 1$.

Réponse. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$; $C_n = (-b)^n C_0$; base si $C_0 \neq 0$; d) $C_n = 6^n$.

Correction de l'exercice 9 – Wronskien d'une équation différentielle

a) $W' = yz'' - y''z$ (les termes $y'z'$ se simplifient). Avec $y'' = -py' - qy$ et $z'' = -pz' - qz$:

$$W' = y(-pz' - qz) - (-py' - qy)z = -p(yz' - y'z) = -pW$$

— L'équation $W' = -pW$ a pour solutions $W(x) = W(0)\mathrm{e}^{-px}$.

b) L'exponentielle ne s'annule pas : $W \equiv 0$ si $W(0) = 0$, et W ne s'annule jamais sinon.

c) $W = \mathrm{e}^x \cdot 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{3x}$. Ici $p = -3$, et $W(0)\mathrm{e}^{-px} = 1 \times \mathrm{e}^{3x}$: conforme.

d) Si $\alpha y + \beta z = 0$, en dérivant $\alpha y' + \beta z' = 0$; en $x = 0$, le système en (α, β) a pour déterminant $W(0) \neq 0$, donc $\alpha = \beta = 0$.

Réponse. $W' = -pW$, $W = W(0)\mathrm{e}^{-px}$; nul partout ou nulle part ; c) $W = \mathrm{e}^{3x}$.

Correction de l'exercice 10 – Matrice compagnon d'un polynôme

a) $XI_3 - C = \begin{pmatrix} X & 0 & c_0 \\ -1 & X & c_1 \\ 0 & -1 & X + c_2 \end{pmatrix}$. Développement selon la dernière colonne :

$$c_0 \begin{vmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} X & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (X + c_2) \begin{vmatrix} X & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} = c_0 + c_1 X + (X + c_2)X^2$$

— $\det(XI_3 - C) = X^3 + c_2 X^2 + c_1 X + c_0$: tout polynôme unitaire est le polynôme caractéristique d'une matrice.

b) $c_2 = -6$, $c_1 = 11$, $c_0 = -6$: $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$: $\lambda \in \{1, 2, 3\}$.

c) $C^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 \end{pmatrix}$ et $C^{\mathsf{T}}(1, \lambda, \lambda^2)^{\mathsf{T}} = (\lambda, \lambda^2, -c_0 - c_1\lambda - c_2\lambda^2)$. La dernière coordonnée vaut λ^3 quand λ est racine. Donc $v = (1, \lambda, \lambda^2)$ convient : pour $\lambda = 2$, $v = (1, 2, 4)$, et $C^{\mathsf{T}}v = (2, 4, 6 - 22 + 24) = (2, 4, 8)$.

Réponse. $\det(XI - C) = X^3 + c_2 X^2 + c_1 X + c_0$; racines $1, 2, 3$; $v = (1, \lambda, \lambda^2)$.

Correction de l'exercice 11 – Déterminants de Cauchy et de Hilbert

a) On réduit au même dénominateur $D = \prod (a_i + b_j)$:

$$\frac{(a_2 + b_2)(a_1 + b_1) - (a_1 + b_2)(a_2 + b_1)}{D}$$

— Le déterminant vaut $\frac{1}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)} - \frac{1}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_1)}$, de numérateur

$$(a_1 + b_2)(a_2 + b_1) - (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— (les termes a_1a_2 et b_1b_2 se compensent), d'où la formule.

b) H_2 correspond à $a = (1, 2)$, $b = (0, 1)$ ($\frac{1}{i+j-1} = \frac{1}{a_i + b_j}$) : $\det H_2 = \frac{1 \times 1}{1 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{12}$.

Contrôle direct : $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

c) $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1$ donnent $\left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$ et $\left(0, \frac{1}{12}, \frac{4}{45}\right)$:

— $\det H_3 = 1 \times \left(\frac{1}{12} \times \frac{4}{45} - \frac{1}{12} \times \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{4}{45} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{180} = \frac{1}{2160}$.

— Ces déterminants minuscules, face à des coefficients de l'ordre de 1, signalent des matrices « presque non inversibles » : mal conditionnées, d'où les instabilités numériques constatées lors de la résolution de systèmes de Hilbert.

Réponse. Formule de Cauchy ; $\det H_2 = \frac{1}{12}$; $\det H_3 = \frac{1}{2160}$.

Correction de l'exercice 12 – Matrices inversibles à coefficients polynomiaux

a) $\det M = X^2 + 1 - X^2 = 1$. La formule de l'inverse d'une matrice 2×2 reste valable (elle ne fait intervenir que des produits et une division par $\det M$) :

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} X^2+1 & -X \\ -X & 1 \end{pmatrix}$$

— Contrôle : $MM^{-1} = \begin{pmatrix} X^2+1-X^2 & -X+X \\ X^3+X-X^3-X & -X^2+X^2+1 \end{pmatrix} = I_2$.

b) Si $NN' = I_2$ avec N' polynomiale, alors $\det N \times \det N' = 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Or $\det N = X^2 - 1$ est de degré 2 : un produit de polynômes de degré total ≥ 2 ne peut valoir 1. Pas d'inverse polynomial (il existe un inverse à coefficients rationnels en X, mais pas polynomial).

c) M a un inverse polynomial si et seulement si $\det M$ est une **constante non nulle** (un polynôme inversible dans $\mathbb{R}[X]$) : nécessité par l'argument de b), suffisance par la formule de la comatrice.

Réponse. $\det M = 1$, $M^{-1} = \begin{pmatrix} X^2+1 & -X \\ -X & 1 \end{pmatrix}$; $\det N = X^2 - 1$: non ; condition : $\det M$ constante non nulle.

Correction de l'exercice 13 – Rotations de l'espace

a) R_θ est diagonale par blocs : $\det R_\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \times 1 = 1$. $\det S = -1$. Par multiplicativité, $\det(R_\theta S) = -1$.

b) R_θ est la rotation d'axe (Oz) et d'angle θ ; S est la symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$; $R_\pi S = \mathrm{diag}(-1, -1, -1) = -I_3$ est la symétrie centrale de centre O.

c) Les colonnes de R_θ sont unitaires et deux à deux orthogonales, donc

$$R_\theta^{\mathsf{T}} R_\theta = I_3, \qquad R_\theta^{-1} = R_\theta^{\mathsf{T}} = R_{-\theta}$$

d) Une rotation conserve l'orientation (déterminant 1). Une matrice orthogonale de déterminant -1 la renverse : ce n'est pas une rotation, mais la composée d'une rotation et d'une symétrie par rapport à un plan (par exemple $-I_3 = R_\pi S$ en dimension 3).

Réponse. $\det R_\theta = 1$, $\det S = -1$; $R_\pi S = -I_3$; $R_\theta^{-1} = R_\theta^{\mathsf{T}}$; $\det = -1$: pas une rotation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Norme d'un produit vectoriel et matrice de Gram

a) $u \cdot u = 9$, $v \cdot v = 25$, $u \cdot v = 3 + 0 + 8 = 11$: $G = 225 - 121 = 104$.

— $u \wedge v = (2 \times 4 - 2 \times 0,\ 2 \times 3 - 1 \times 4,\ 1 \times 0 - 2 \times 3) = (8, 2, -6)$, de norme au carré $64 + 4 + 36 = 104$. Égalité.

b) $G(u, v) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2 = \|u \wedge v\|^2 \geq 0$, nul si et seulement si $u \wedge v = 0$, c'est-à-dire si u et v sont colinéaires (tous les mineurs 2×2 de la matrice $(u\ v)$ sont nuls, donc son rang est ≤ 1).

c) $G \geq 0$ s'écrit

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2, \quad \text{soit} \quad |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

— Aire du parallélogramme : $\|u \wedge v\| = \sqrt{G(u, v)} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Réponse. $G = 104 = \|u \wedge v\|^2$; $G \geq 0$ (Cauchy-Schwarz) ; aire $2\sqrt{26}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : Cayley-Hamilton en taille 2

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$ et $tA = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$. Donc

$$A^2 - tA = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -\delta I_2$$

b) $t = 5$, $\delta = 4 - 6 = -2$: $A^2 - 5A - 2I_2 = 0$, soit $A^2 = 5A + 2I_2$.

— $A(A - 5I_2) = 2I_2$, donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (contrôle : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_2$).

— $A^3 = A \cdot A^2 = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$.

c) Si $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$, alors $A^{n+1} = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n(5A + 2I_2) + \beta_n A = (5\alpha_n + \beta_n)A + 2\alpha_n I_2$.

d) $\alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 5\alpha_{n+1} + 2\alpha_n$. Son équation caractéristique $r^2 = 5r + 2$ est exactement $\chi_A(r) = r^2 - 5r - 2 = 0$: les puissances de A obéissent à la récurrence dictée par son polynôme caractéristique. Contrôle : $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 25 + 2 = 27$.

Réponse. $A^2 - tA + \delta I_2 = 0$; $A^2 = 5A + 2I_2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I_2)$, $A^3 = 27A + 10I_2$; $\alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} + 2\alpha_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).