Plaquette 4 – Déterminants et géométrie : aires, volumes, alignements

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Géométrie et déterminants (repère orthonormé direct).

— **Aire orientée** du parallélogramme construit sur $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$: $\det(u, v) = ad - bc$; aire du triangle ABC :

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

— **Volume** du parallélépipède construit sur u, v, w : $|\det(u, v, w)|$; volume du tétraèdre $ABCD$: $\frac{1}{6}\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

— **Colinéarité** : $\det(u, v) = 0 \Leftrightarrow u, v$ colinéaires. **Coplanarité** : $\det(u, v, w) = 0$.

— Droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

— **Produit vectoriel** : $u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right)$, et $\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$.

— Une application linéaire f multiplie les aires (en dimension 2) ou les volumes (en dimension 3) par $|\det f|$; elle conserve l'orientation si $\det f > 0$.

Correction de l'exercice 1 – Aire d'un parallélogramme

a) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, soit $C = D + \overrightarrow{AB} = (1 + 5, 3 + 1) = (6, 4)$.

b) L'aire du parallélogramme est la valeur absolue du déterminant des deux côtés issus de A :

$$A(ABCD) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = |15 - 1| = 14$$

— Le triangle ABD en est la moitié : aire 7.

c) Aire $= \frac{1}{2} \times AB \times h$ avec $AB = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$: $h = \frac{2 \times 7}{\sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{26}} \approx 2{,}75$.

Réponse. $C(6, 4)$; aire 14 (triangle : 7) ; $h = \frac{14}{\sqrt{26}} \approx 2{,}75$.

Correction de l'exercice 2 – Aire d'un quadrilatère : la formule du lacet

a) Avec l'origine en O, les aires orientées sont des demi-déterminants des vecteurs position :

$$A(OPQ) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{12}{2} = 6, \qquad A(OQR) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{17}{2}$$

— Les deux sont positives (sens direct) : aire totale $6 + 8{,}5 = 14{,}5$.

b) Termes $x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $O \to P$: $0 \times 0 - 4 \times 0 = 0$; $P \to Q$: $4 \times 3 - 5 \times 0 = 12$; $Q \to R$: $5 \times 4 - 1 \times 3 = 17$; $R \to O$: $1 \times 0 - 0 \times 4 = 0$.

— $\frac{1}{2}(0 + 12 + 17 + 0) = 14{,}5$. Chaque terme est le double de l'aire orientée du triangle OM_iM_{i+1} : la formule découpe le polygone en triangles de sommet O.

c) Chaque terme change de signe (on échange M_i et M_{i+1}) : on obtient $-14{,}5$. La formule donne l'aire **orientée** ; on prend la valeur absolue si l'on ne connaît pas le sens de parcours.

Réponse. $6 + \frac{17}{2} = 14{,}5$; formule du lacet $\frac{1}{2}(0 + 12 + 17 + 0)$; sens inverse : $-14{,}5$.

Correction de l'exercice 3 – Équation d'une droite en déterminant

a) En développant selon la première ligne, l'expression est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma$ avec $(\alpha, \beta) = (y_1 - y_2,\, x_2 - x_1) \neq (0, 0)$ (les points sont distincts) : c'est l'équation d'une droite. Elle est vérifiée par A et B (le déterminant a alors deux lignes égales). C'est donc la droite (AB).

— Autre lecture : $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ donnent $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)$ au signe près, nul si et seulement si $M \in (AB)$.

b) Développement selon la première ligne :

$$x\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix} = -5x + 2y + 1 = 0$$

— soit $5x - 2y - 1 = 0$. Contrôle : $5 - 4 - 1 = 0$ et $15 - 14 - 1 = 0$.

c) $5 \times (-1) - 2 \times (-3) - 1 = -5 + 6 - 1 = 0$: oui, C est sur la droite, les trois points sont alignés.

Réponse. (AB):$5x - 2y - 1 = 0$; A, B, C alignés.

Correction de l'exercice 4 – Trois droites concourantes

a) Le système $x + y = 3$, $2x - y = 0$ a pour déterminant $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

b) Les trois droites sont concourantes si et seulement si $(1, 2) \in D_c$: $1 + 4 + c = 0$, soit $c = -5$.

c) Les droites sont concourantes en (x_0, y_0) si et seulement si $(x_0, y_0, 1)$ est solution du système homogène de matrice $M = (a_i\ b_i\ c_i)$. S'il existe un tel point, M a un noyau non nul, donc $\det M = 0$. Réciproquement, si $\det M = 0$, il existe $(x, y, z) \neq 0$ dans le noyau ; si $z = 0$, alors (x, y) serait un vecteur directeur commun aux trois droites (elles seraient parallèles), exclu ; donc $z \neq 0$ et $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ est commun.

— Vérification : $\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & c\end{vmatrix} = 1(-c - 0) - 1(2c - 0) - 3(4 + 1) = -3c - 15$, nul pour $c = -5$.

Réponse. $D_1 \cap D_2 = \{(1, 2)\}$; $c = -5$; critère : $\det(a_i\ b_i\ c_i) = 0$.

Correction de l'exercice 5 – Volume d'un tétraèdre

a) Les colonnes sont $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$, $(2, 0, 1)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 0 + 2(6-0) = 13$$

b) Parallélépipède : $|13| = 13$. Tétraèdre : $\frac{13}{6}$ (un sixième du parallélépipède).

c) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2\times 3 - 0\times 1,\ 0\times 0 - 1\times 3,\ 1\times 1 - 2\times 0) = (6, -3, 1)$, de norme $\sqrt{36+9+1} = \sqrt{46}$.

— Aire de ABC : $\frac{\sqrt{46}}{2}$.

— Volume du tétraèdre $= \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times d$, donc $d = \frac{3 \times 13/6}{\sqrt{46}/2} = \frac{13}{\sqrt{46}}$. Contrôle : c'est aussi $\frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} = \frac{|12+0+1|}{\sqrt{46}}$.

Réponse. det = 13 ; volume du tétraèdre $\frac{13}{6}$; aire $ABC = \frac{\sqrt{46}}{2}$; $d = \frac{13}{\sqrt{46}}$.

Correction de l'exercice 6 – Quatre points coplanaires

a) Les points sont coplanaires si et seulement si les trois vecteurs issus de A le sont :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM_t}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & t-1 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix}$$

— Développement selon la première ligne :
$-1(0-t) + 1(t-0) + (t-1)(1-0) = t + t + t - 1 = 3t - 1$.

— Coplanaires si et seulement si $t = \frac{1}{3}$.

b) Avec $M(x,y,z)$: $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) + y + z$ (développement selon la première colonne : $(x-1)\times 1 - y\times(-1) + z\times(0+1)$).

— (ABC):$x + y + z = 1$.

c) M_t parcourt la droite Vect$(1,1,1)$, orthogonale au plan (ABC) ; elle le coupe en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, centre de gravité du triangle ABC.

Réponse. $t = \frac{1}{3}$; (ABC):$x + y + z = 1$; $M_{1/3}$ est le centre de gravité de ABC.

Correction de l'exercice 7 – Vecteur normal par le produit vectoriel

a) $\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1,3)$. Par les mineurs 2×2 :

$$n = ((-1)(3) - (1)(1),\ (1)(-1) - (1)(3),\ (1)(1) - (-1)(-1)) = (-4,-4,0)$$

— $n \cdot \overrightarrow{AB} = -4 + 4 + 0 = 0$ et $n \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 + 0 = 0$.

b) Le plan a pour vecteur normal n, ou $(1,1,0)$: équation $x + y = d$, et A donne $d = 2$. (ABC):$x + y = 2$. Contrôle : B : $2 + 0 = 2$; C : $0 + 2 = 2$.

c) En développant $\det(u,v,w)$ selon la troisième colonne w, les cofacteurs sont exactement les composantes de $u \wedge v$: $\det(u,v,w) = (u \wedge v) \cdot w$. Avec $w = \overrightarrow{AM} = (x-1, y-1, z)$: $-4(x-1) - 4(y-1) = 0$, soit $x + y = 2$.

Réponse. $n = (-4,-4,0)$; (ABC):$x + y = 2$; $\det(u,v,w) = (u \wedge v) \cdot w$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Comment une application linéaire change les aires

a) L'image du carré est le parallélogramme construit sur $f(e_1) = (2, 1)$ et $f(e_2) = (1, 3)$, d'aire

$$\det(f(e_1), f(e_2)) = |\det A| = |6 - 1| = 5$$

b) $f(T)$ est le triangle $f(P)f(Q)f(R)$, et $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f\left(\overrightarrow{PQ}\right)$ (linéarité). Or $\det(Au, Av) = \det(A(u\ v)) = \det A \det(u, v)$: l'aire est multipliée par $|\det A|$.

c) $5 \times \pi = 5\pi$ (l'image est une ellipse).

d) $|\det A| = 1$. Exemple : la transvection $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui envoie le carré unité sur un parallélogramme de même base et même hauteur (aire 1), mais ne conserve pas les longueurs ($e_2 \mapsto (1, 1)$, de norme $\sqrt{2}$).

Réponse. Aire de l'image du carré : 5 ; facteur $|\det A|$; disque : 5π ; aires conservées ssi $|\det A| = 1$ (ex. transvection).

Correction de l'exercice 9 – Orientation d'une base

a) La première matrice est celle de la permutation échangeant e_2 et e_3 : déterminant -1, base **indirecte**.

— Seconde base : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 - 0) - 0 + 1(1 - 0) = 2 > 0$: **directe**.

b) Échanger deux vecteurs change le signe du déterminant (alternance) : l'orientation s'inverse. Une permutation circulaire est la composée de deux transpositions ($(u, v, w) \to (v, u, w) \to (v, w, u)$) : le signe est inchangé, l'orientation conservée.

c) $\det(Au, Av, Aw) = \det A \times \det(u, v, w)$:

$$\det A = 1 \Rightarrow \text{même signe}, \qquad \det A = -1 \Rightarrow \text{signe opposé}$$

— Une symétrie orthogonale par rapport à un plan a pour matrice $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$ dans une base adaptée : déterminant -1, elle renverse l'orientation (comme un miroir échange main droite et main gauche).

Réponse. a) indirecte (-1), directe (2) ; b) transposition : inverse ; cycle : conserve ; c) $\det A = \pm 1$ conserve ou renverse.

Correction de l'exercice 10 – Cercle par trois points et cocyclicité

a) En développant selon la première ligne, on obtient une équation $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$, avec $\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ (non-alignement). C'est l'équation d'un cercle (ou d'un point, ou du vide), vérifiée par les trois points (deux lignes égales) : c'est le cercle cherché.

b) Lignes des points : $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, -1, 0, 1)$. En développant :

— $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 0 + 1(0 + 1) = 2$;

— par symétrie du calcul, l'équation obtenue est $2(x^2 + y^2) - 2 = 0$, soit $x^2 + y^2 = 1$ (on vérifie que $\beta = \gamma = 0$ et $\delta = -2$: les trois points sont à distance 1 de l'origine).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$: D est sur le cercle, A, B, C, D sont **cocycliques** (le déterminant 4×4 avec la ligne de D est nul). E : $1+1=2\neq 1$, non.

Réponse. Cercle $x^2+y^2=1$; D cocyclique avec A, B, C ; E non.

Correction de l'exercice 11 – Un point est-il dans le triangle ?

a) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})>0$ signifie que M est **à gauche** de la droite (AB) orientée de A vers B. Le triangle étant direct, son intérieur est exactement l'ensemble des points à gauche des trois côtés orientés AB, BC, CA.

b) $\det(ABC)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=12>0$: triangle direct.

— $P(2,1)$: $\det((4,0),(2,1))=4$; $\det((-3,3),(-2,1))=-3+6=3$; $\det((-1,-3),(1,-2))=2+3=5$. Tous positifs : **intérieur**.

— $Q(3,2)$: $\det((4,0),(3,2))=8$; $\det((-3,3),(-1,2))=-6+3=-3<0$: **extérieur** (au-delà de $[BC]$).

c) Les aires orientées sont les moitiés de ces déterminants :

$$\frac{4}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=6=\frac{12}{2}=A(ABC)$$

— Les trois nombres $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$ sont les **coordonnées barycentriques** de P (poids de C, A, B respectivement).

Réponse. P intérieur (déterminants $4, 3, 5$) ; Q extérieur ; $2+1{,}5+2{,}5=6$.

Correction de l'exercice 12 – Distance d'un point à une droite

a) L'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ vaut base fois hauteur, soit $AB\times d$. Donc

$$d=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)}{AB}$$

b) $\overrightarrow{AB}=(4,3)$, $AB=5$; $\overrightarrow{AM}=(3,-2)$. $\det=4\times(-2)-3\times 3=-17$. Donc $d=\frac{17}{5}=3{,}4$.

c) (AB) : vecteur directeur $(4,3)$, normal $(3,-4)$; $3x-4y+c=0$ avec A : $3-8+c=0$, $c=5$. Distance : $\frac{|12-0+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{17}{5}$. Les deux formules concordent : le numérateur de la seconde est le déterminant de la première.

Réponse. $d=\frac{|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})|}{AB}=\frac{17}{5}$.

Correction de l'exercice 13 – Déterminant, produit scalaire et angle

a) On développe :

$$(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=a^2d^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2d^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

— (les doubles produits $-2abcd$ et $+2abcd$ se compensent).

b) En divisant par $\|u\|^2\|v\|^2$: $\left(\frac{\det(u,v)}{\|u\|\|v\|}\right)^2+\left(\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}\right)^2=1$. Le point de coordonnées (cosinus potentiel, sinus potentiel) est sur le cercle unité : il existe θ (l'angle orienté de u à v) qui convient.

c) $u\cdot v=3+2=5$, $\det(u,v)=6-1=5$, $\|u\|\|v\|=\sqrt{10}\sqrt{5}=5\sqrt{2}$. Donc $\cos\theta=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\theta=\frac{\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\det(u,v)^2 + (u\cdot v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$; $\cos\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$, $\sin\theta = \frac{\det(u,v)}{\|u\|\|v\|}$; c) $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 14 – Aire sous une transformation affine du plan

a) $g(X) = AX + b$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = (1,-2)$. La translation ne change pas les aires.

b) $g(O) = (1,-2)$, $g(I) = (2,1)$, $g(J) = (3,-1)$. Aire :

$$\frac{1}{2}\det(g(I)-g(O),\, g(J)-g(O)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|1-6|}{2} = \frac{5}{2}$$

— C'est $|\det A| = 5$ fois l'aire $\frac{1}{2}$ du triangle OIJ.

c) $\det A = -5 < 0$: g **renverse** l'orientation (le triangle OIJ, direct, a une image indirecte).

d) $5 \times 2 = 10$ hectares (unités de la carte), quelle que soit la forme du champ.

Réponse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -5$; aire de l'image $\frac{5}{2}$; orientation renversée ; 10 ha.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : image d'un disque par une transvection

a) $\det A = 2 \times 1 - 1 \times 0 = 2$. L'aire est multipliée par $|\det A|$:

$$A(f(D)) = 2 \times \pi = 2\pi$$

b) $(x,y) = f(u,v) = (2u+v, v)$ équivaut à $v = y$ et $u = \frac{x-y}{2}$ (f est bijective, $\det A \neq 0$). Donc $(x,y) \in f(D) \Leftrightarrow (u,v) \in D \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1$.

c) $(2,0)$: $\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 0 = 1$; $(1,1)$: $0 + 1 = 1$. Ils sont sur le bord, images des points I et J du cercle.

d) $f(D)$ est l'image du disque (aire $\pi \times 1 \times 1$) par une application de déterminant 2 : 2π. L'ellipse obtenue a ses axes inclinés (sa forme n'est pas $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \leq 1$ dans le repère initial), mais son aire se lit directement sur le déterminant, sans chercher ses axes : c'est toute la force du résultat.

Réponse. $\det A = 2$; aire 2π ; $f(D)$: $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).