Plaquette 3 – Propriétés du déterminant : produit, inversibilité, comatrice

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés.

— $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ ($A \in M_n$).

— A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

— **Matrices semblables** : $\det(P^{-1}AP) = \det A$; le **déterminant d'un endomorphisme** est celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

— **Comatrice** : $\mathrm{com}A = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})$, et

$$A\,(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}} = (\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}} A = \det(A)\, I_n$$

d'où, si $\det A \neq 0$: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}}$.

— **Ordre 2** : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— **Rang** : $\mathrm{rg}A$ est la taille maximale d'un mineur (déterminant extrait carré) non nul.

— **Cramer** : si $\det A \neq 0$, $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ (A_i : colonne i remplacée par B).

Correction de l'exercice 1 – Obstructions par le déterminant

a) En prenant le déterminant, et avec $\det(-I_n) = (-1)^n$:

$$(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(-I_n) = (-1)^n = -1$$

— impossible pour un réel. Donc aucune matrice réelle ne vérifie $A^2 = -I_n$ en dimension impaire.

b) $n = 2$: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (quart de tour), $J^2 = -I_2$. $n = 4$: la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$, dont le carré est $\mathrm{diag}(J^2, J^2) = -I_4$.

c) Oui : $A = iI_3$ vérifie $A^2 = -I_3$. L'argument a) utilisait qu'un carré réel est positif ; sur $\mathbb{C}$, $(\det A)^2 = -1$ est possible ($\det A = \pm i$).

d) $\det(AB) = \det(-BA) = (-1)^n \det B \det A = -\det A \det B$ (n impair). Donc $2 \det A \det B = 0$: $\det A = 0$ ou $\det B = 0$.

Réponse. $(\det A)^2 = (-1)^n$; impossible sur $\mathbb{R}$ pour n impair ; exemples J, $\mathrm{diag}(J, J)$; possible sur $\mathbb{C}$; $AB = -BA$ en dimension impaire force $\det A \det B = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Valeurs forcées du déterminant

On applique la multiplicativité à la relation vérifiée par A.

a) $(\det A)^k = \det(A^k) = 0$, donc $\det A = 0$. Exemple : E_{12}.

b) $(\det A)^2 = \det A$, donc $\det A \in \{0, 1\}$. Exemples : 0 (la matrice nulle, ou tout projecteur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de rang $< n$) et I_n (déterminant 1 ; c'est d'ailleurs le seul projecteur inversible, car $A^2 = A$ avec A inversible donne $A = I_n$).

c) $\det(A^{\mathsf{T}})\det A = (\det A)^2 = \det I_n = 1$, donc

$$\det A = \pm 1$$

— Exemples : I_n (déterminant 1) et $\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, une symétrie orthogonale (déterminant -1).

d) $(\det A)^3 = 1$ avec $\det A$ réel : $\det A = 1$. Exemple : la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ du plan (complétée par des 1 si $n > 2$), ou I_n.

Réponse. a) 0 ; b) 0 ou 1 ; c) ± 1 ; d) 1.

Correction de l'exercice 3 – Déterminant d'un endomorphisme de matrices

Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie : on prend la plus commode.

a) Dans la base $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21})$, T a pour matrice $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$: $\det T = -1$. Dans la base canonique, la matrice de T est la matrice de permutation qui échange deux vecteurs de base (une transposition) : déterminant -1 aussi.

b) Dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$, la matrice de L_A est $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$:

$$\det L_A = \det A \times \det A = (\det A)^2$$

c) $\sigma(X^k) = (-1)^k X^k$: matrice diagonale,
$\det \sigma = \prod_{k=0}^{n} (-1)^k = (-1)^{0+1+\dots+n} = (-1)^{n(n+1)/2}$.

d) La matrice de τ dans la base canonique est triangulaire supérieure à diagonale de 1 ($\tau(X^k) = X^k$ + termes de degré $< k$) : $\det \tau = 1$.

Réponse. $\det T = -1$; $\det L_A = (\det A)^2$; $\det \sigma = (-1)^{n(n+1)/2}$; $\det \tau = 1$.

Correction de l'exercice 4 – Inverse par la comatrice

a) Développement selon la première ligne : $\det A = 2(3-1) - 1(3-0) + 0 = 4 - 3 = 1$.

b) Cofacteurs $c_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$:

— ligne 1 : $\Delta_{11} = 3 - 1 = 2$, $\Delta_{12} = 3 - 0 = 3$, $\Delta_{13} = 1 - 0 = 1$, d'où $(2, -3, 1)$;
— ligne 2 : $\Delta_{21} = 3 - 0 = 3$, $\Delta_{22} = 6 - 0 = 6$, $\Delta_{23} = 2 - 0 = 2$, d'où $(-3, 6, -2)$;
— ligne 3 : $\Delta_{31} = 1 - 0 = 1$, $\Delta_{32} = 2 - 0 = 2$, $\Delta_{33} = 2 - 1 = 1$, d'où $(1, -2, 1)$.

c) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}}$, et la comatrice est ici symétrique :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

— Ligne 2 de A fois les colonnes de A^{-1} : $(2 - 3 + 1,\ -3 + 6 - 2,\ 1 - 2 + 1) = (0, 1, 0)$.

d) Cramer : $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ avec la colonne i remplacée par $(1, 0, 0)$. En développant chaque $\det A_i$ selon cette colonne, on retrouve le cofacteur c_{1i} : $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$. C'est la première colonne de A^{-1}, comme il se doit ($X = A^{-1}e_1$).

Réponse. $\det A = 1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = (2, -3, 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Inverse à coefficients entiers

a) $\det A$ et $\det(A^{-1})$ sont des entiers (sommes de produits d'entiers) et

$$\det A \times \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = 1$$

— deux entiers de produit 1 valent tous deux 1 ou tous deux -1.

b) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}}$; les cofacteurs sont des déterminants de matrices entières, donc entiers, et l'on divise par ± 1.

c) $\det\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix} = 10 - 9 = 1$: inverse entier $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ (vérification : $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$). $\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 3$: son inverse $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ n'est pas entier.

d) I_2 en fait partie ; le produit de deux telles matrices est entier de déterminant $(\pm 1)(\pm 1) = \pm 1$; l'inverse est entier (b) et de déterminant ± 1. C'est le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$.

Réponse. A^{-1} entière $\Leftrightarrow \det A = \pm 1$; $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$; $GL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe.

Correction de l'exercice 6 – Déterminant de la comatrice

a) On prend le déterminant de $A(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}} = \det(A) I_n$:

$$\det A \times \det(\mathrm{com}A) = (\det A)^n$$

— et l'on simplifie par $\det A \neq 0$.

b) $\mathrm{com}A = \begin{pmatrix}d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$, de déterminant $ad - bc = (\det A)^1$.

c) Si $\mathrm{rg}A \leq n-2$, toute famille de $n-1$ colonnes de A est liée, donc toute sous-matrice de taille $n-1$ (obtenue en supprimant une ligne et une colonne) a des colonnes liées : tous les mineurs Δ_{ij} sont nuls, $\mathrm{com}A = 0$.

d) Si $\mathrm{rg}A = n-1$, il existe un mineur de taille $n-1$ non nul (le rang est la taille maximale d'un mineur non nul) : $\mathrm{com}A \neq 0$. De plus $\det A = 0$, donc $A(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}} = 0$: les colonnes de $(\mathrm{com}A)^{\mathsf{T}}$ sont dans $\ker A$, de dimension $n - (n-1) = 1$. Donc $\mathrm{rg}(\mathrm{com}A) \leq 1$, et $\mathrm{com}A \neq 0$ donne l'égalité.

Réponse. $\det \mathrm{com}A = (\det A)^{n-1}$; $\mathrm{com}A = 0$ si $\mathrm{rg}A \leq n-2$; rang 1 si $\mathrm{rg}A = n-1$.

Correction de l'exercice 7 – Rang par les mineurs

a) Les deux premières colonnes sont proportionnelles ($C_2 = 2C_1$) : $\det A_t = 0$ pour tout t. Le rang est au plus 2.

b) Le mineur formé des lignes 2, 3 et des colonnes 1, 3 :

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

— Le rang est la taille maximale d'un mineur non nul : $\mathrm{rg}A_t = 2$ pour tout t.

c) Les mineurs d'ordre 2 de B_t sont :

— lignes $1,2$: $1 - t^2$; lignes $1,3$: $1 - t$; lignes $2,3$: $t - 1$.

— Ils sont tous nuls si et seulement si $t = 1$. Donc $\mathrm{rg}B_t = 2$ pour $t \neq 1$, et $\mathrm{rg}B_1 = 1$ (toutes les colonnes valent $(1,1,1)$). Pour $t = -1$, le mineur $1 - t^2$ est nul mais $1 - t = 2 \neq 0$: rang 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\det A_t = 0$, $\operatorname{rg} A_t = 2$; $\operatorname{rg} B_t = 2$ si $t \neq 1$, 1 si $t = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Perturber une matrice non inversible

a) Par la formule développée du déterminant (somme de produits de coefficients, un par ligne et par colonne), $\det(A + tI_n)$ est un polynôme en t ; le seul produit de degré n est celui des termes diagonaux $\prod (a_{ii} + t)$, de terme dominant t^n.

b) Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines. Hors de ces valeurs, $A + tI_n$ est inversible ; en particulier, pour k assez grand, $t_k = \frac{1}{k}$ n'est pas racine.

c) Si A est inversible, $BA - \lambda I_n = A^{-1}(AB - \lambda I_n)A$: matrices semblables, même déterminant.

$$\det(BA - \lambda I_n) = \det(A^{-1}) \det(AB - \lambda I_n) \det A = \det(AB - \lambda I_n)$$

— Pour A quelconque : l'égalité est vraie pour $A_k = A + t_k I_n$ inversible. Les deux membres sont des fonctions polynomiales (donc continues) des coefficients de A_k ; en faisant $k \to +\infty$, elle vaut pour A.

d) $AB = E_{11}E_{12} = E_{12}$ et $BA = E_{12}E_{11} = 0$. $\det(E_{12} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$ et $\det(-\lambda I_2) = \lambda^2$.

Égaux, bien que $AB \neq BA$ (et même non semblables : l'une est nulle, l'autre non).

Réponse. $\det(A + tI_n)$ polynôme unitaire de degré n ; densité des inversibles ; $\det(AB - \lambda I) = \det(BA - \lambda I)$.

Correction de l'exercice 9 – Déterminant dans une base et changement de base

a) $\det_B(v, w) = ad - bc$.

b) Matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det P = 1$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Coordonnées : $v' = (2a - b,\ -a + b)$, $w' = (2c - d,\ -c + d)$.

— $\det_{B'}(v, w) = (2a - b)(-c + d) - (2c - d)(-a + b) = ad - bc$ (en développant : $-2ac + 2ad + bc - bd + 2ac - 2bc - ad + bd = ad - bc$).

c) $\det_{B'}(B)$ est le déterminant des coordonnées de e_1, e_2 dans B', c'est-à-dire des colonnes de P^{-1} :

$$\det_{B'}(B) = \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det P} = 1$$

— et l'on retrouve bien $\det_{B'}(v, w) = 1 \times (ad - bc)$.

d) Ici $\det P = 1$, donc les deux mesures coïncident : B' engendre un parallélogramme de même aire que le carré unité. En général, elles diffèrent du facteur constant $\det_{B'}(B)$: l'aire orientée n'est définie qu'à la donnée d'une base près.

Réponse. $\det_B(v, w) = \det_{B'}(v, w) = ad - bc$ (car $\det P = 1$) ; en général, facteur $\det_{B'}(B) = \frac{1}{\det P}$.

Correction de l'exercice 10 – Un système de Cramer à paramètre

a) Diagonale a, ailleurs 1 : $\det = (a + 2)(a - 1)^2$. Cramer si et seulement si $a \notin \{1, -2\}$.

b) En sommant les trois équations : $(a + 2)(x + y + z) = 1 + a + a^2$. Puis, en retranchant L_1 de L_2 : $(a - 1)(y - x) = a - 1$, donc $y = x + 1$; $L_3 - L_2$: $(a - 1)(z - y) = a^2 - a$, donc $z = y + a$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Donc $x+y+z = 3x+2+a$, et $3x = \frac{1+a+a^2}{a+2} - 2 - a = \frac{1+a+a^2-(a+2)^2}{a+2} = \frac{-3a-3}{a+2}$.

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, \qquad y = \frac{1}{a+2}, \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

— Contrôle de la première équation : $\frac{-a(a+1)+1+(a+1)^2}{a+2} = \frac{a+2}{a+2} = 1$. Avec les formules de Cramer, on retrouve par exemple $y = \frac{\det A_2}{\det A}$ où $\det A_2 = (a-1)^2$.

c) $a = 1$: les trois équations deviennent $x+y+z = 1$: compatibles, solutions formant un plan (dimension 2). $a = -2$: la somme des équations donne $0 = 1-2+4 = 3$: incompatible, aucune solution.

Réponse. $\det = (a+2)(a-1)^2$; $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$; $a = 1$: plan de solutions ; $a = -2$: aucune.

Correction de l’exercice 11 – Le déterminant n’est pas linéaire

a) $A = E_{11}$, $B = E_{22}$: $\det A = \det B = 0$ et $\det(A+B) = \det I_2 = 1$.

b) Le déterminant est **linéaire par rapport à chaque colonne** séparément :

$$\det(a_1+b_1, a_2+b_2) = \det(a_1,a_2) + \det(a_1,b_2) + \det(b_1,a_2) + \det(b_1,b_2)$$

— soit $\det A + \det B$ plus les deux termes « croisés ».

c) $A+E$ a pour colonnes $a_1+u, a_2, \dots, a_n$. Par linéarité en la première colonne : $\det(A+E) = \det A + \det(u, a_2, \dots, a_n)$. Écrivons $u = AX = \sum x_j a_j$; dans $\det(u, a_2, \dots)$, seul le terme $x_1 a_1$ subsiste (les autres donnent deux colonnes égales) : $\det(u, a_2, \dots) = x_1 \det A$. Donc $\det(A+E) = (1+x_1)\det A$.

d) $A^{-1}u = u$, $x_1 = 2$: $\det(I_3+E) = 3$. Directement : $I_3+E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, triangulaire, déterminant 3.

Réponse. $\det(E_{11}+E_{22}) = 1 \neq 0+0$; multilinéarité en colonnes ; $\det(A+E) = (1+x_1)\det A$; d) 3.

Correction de l’exercice 12 – Le wronskien et la liberté de fonctions

a) Si $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ avec $(\alpha,\beta,\gamma) \neq 0$, en dérivant, la même relation lie f', g', h' et f'', g'', h''. Les colonnes de $W(x)$ sont donc liées pour tout x, et $W(x) = 0$.

b) C’est la contraposée de a).

c) Chaque colonne est de la forme $\mathrm{e}^{kx}(1, k, k^2)$. Par linéarité en chaque colonne :

$$W(x) = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{3x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{6x}(2-1)(3-1)(3-2) = 2\mathrm{e}^{6x}$$

— (Vandermonde en $1, 2, 3$). W ne s’annule pas : la famille est libre.

d) $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$: famille liée, et $W = 0$ par a). Directement : la première colonne est $(1,0,0)$, et le mineur restant est $\begin{vmatrix} -\sin 2x & \sin 2x \\ -2\cos 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0$. (Attention : $W \equiv 0$ n’entraîne pas en général que la famille soit liée.)

Réponse. Liée $\Rightarrow W \equiv 0$; $W(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{6x}$: libre ; $(1, \cos^2, \sin^2)$: $W = 0$, liée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Le déterminant de la transposée et les lignes

a) Les lignes de A sont les colonnes de A^{T}, et

$$\det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det A$$

— donc toute propriété prouvée pour les colonnes (multilinéarité, alternance, effet des opérations) se transporte aux lignes.

b) Une ligne nulle : par linéarité en cette ligne, $\det A = 0 \times \det A = 0$. Deux lignes proportionnelles $L_j = \lambda L_i$: $L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$ crée une ligne nulle sans changer le déterminant.

c) $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ ne change pas le déterminant et rend la première ligne nulle : $\det A = 0$. (Les lignes sont liées, A n'est pas inversible.)

d) $L_1 + L_2 + L_3 = (1 + 4 - 5,\ -2 + 0 + 2,\ 3 - 1 - 2) = (0, 0, 0)$: le déterminant est nul.

Réponse. $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$; lignes liées ⇒ det = 0 ; d) 0 (somme des lignes nulle).

Correction de l'exercice 14 – Déterminant d'une matrice de rang 1 plus l'identité

a) $M = I_n$, $\det M = 1$.

b) $Mx = x + u(v^{\mathsf{T}}x)$ (associativité : $uv^{\mathsf{T}}x = u\,(v^{\mathsf{T}}x)$, avec $v^{\mathsf{T}}x$ scalaire). Si $x \in H$, $Mx = x$. Et $Mu = u + u(v^{\mathsf{T}}u) = (1 + v^{\mathsf{T}}u)u$.

c) Soit $(h_1, \ldots, h_{n-1})$ une base de H, complétée par u. Dans cette base, la matrice de $x \mapsto Mx$ est diagonale :

$$\operatorname{diag}\left(1, \ldots, 1, 1 + v^{\mathsf{T}}u\right), \qquad \det M = 1 + v^{\mathsf{T}}u$$

— (le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base). Le cas $v^{\mathsf{T}}u = 0$ s'obtient par continuité, ou directement : la formule reste $\det M = 1$.

d) $J_n = uu^{\mathsf{T}}$ avec $u = (1, \ldots, 1)$, et $u^{\mathsf{T}}u = n$: $\det(I_n + J_n) = 1 + n$. La formule $(x + n - 1)(x - 1)^{n-1}$ avec $x = 2$ donne aussi $n + 1$.

Réponse. $Mx = x$ sur H, $Mu = (1 + v^{\mathsf{T}}u)u$; $\det(I_n + uv^{\mathsf{T}}) = 1 + v^{\mathsf{T}}u$; $\det(I_n + J_n) = n + 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le déterminant de Vandermonde en taille n

a) On développe selon la dernière ligne $(1, X, \ldots, X^{n-1})$: $P(X) = \sum_j (-1)^{n+j} X^{j-1} \Delta_{nj}$, polynôme de degré $\leq n - 1$; le coefficient de X^{n-1} est le cofacteur $(-1)^{2n}\Delta_{nn} = V(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

b) $P(x_i)$ $(i \leq n - 1)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales (les lignes i et n) : il est nul.

c) Si les $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont distincts, P est divisible par $\prod_{i<n}(X - x_i)$, de degré $n - 1$; en comparant les coefficients dominants :

$$P(X) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$$

— (si deux x_i coïncident, les deux membres sont nuls). En évaluant en x_n, puis par récurrence à partir de $V(x_1) = 1$:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Le produit est non nul si et seulement si tous les facteurs le sont, c'est-à-dire si les x_i sont distincts. Interprétation : V est le déterminant du système donnant les coefficients du polynôme d'interpolation de degré $\leq n-1$ aux points x_i ; il est de Cramer exactement quand les points sont distincts.

Réponse. $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$; non nul ssi les x_i sont distincts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).