Plaquette 1 – Calcul de déterminants, Vandermonde et formules de Cramer

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On calcule un déterminant par **opérations élémentaires** puis développement selon une ligne ou une colonne, on utilise la **multilinéarité** et l'alternance, et on applique le déterminant à l'inversibilité, au rang et aux systèmes de Cramer.

Exercice 1 – Déterminants d'ordre 2 et 3

Calculer :

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 2 – Opérations élémentaires

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

Exercice 3 – Déterminant triangulaire

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 – Déterminant et inversibilité

Pour quelles valeurs de m la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 5 – Déterminant de Vandermonde

Démontrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Formules de Cramer

Résoudre par les formules de Cramer : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Exercice 7 – Déterminant d'un produit

Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ avec $\det A = 2$ et $\det B = -3$. Calculer $\det(AB)$, $\det(2A)$, $\det\left(A^{-1}\right)$ et $\det\left(A^{\mathsf{T}} B^2\right)$.

Exercice 8 – Base ou famille liée

La famille $((1,2,1), (2,1,3), (1,-1,2))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9 – Interprétation géométrique

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}(3,1)$ et $\vec{v}(1,4)$, puis le volume du parallélépipède sur $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Exercice 10 – Comatrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\det A$ puis A^{-1} via la comatrice.

Exercice 11 – Déterminant par blocs

Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Exercice 12 – Un déterminant d'ordre 4 par le pivot

Calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

en faisant apparaître des zéros dans la première colonne, puis en développant.

Exercice 13 – Matrices antisymétriques d'ordre impair

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique ($A^{\mathsf{T}} = -A$).

a) Montrer que $\det A = (-1)^n \det A$. En déduire que $\det A = 0$ si n est impair.

b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ par la règle de Sarrus, et trouver un vecteur non nul du noyau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le résultat subsiste-t-il pour n pair ? Calculer $\det\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

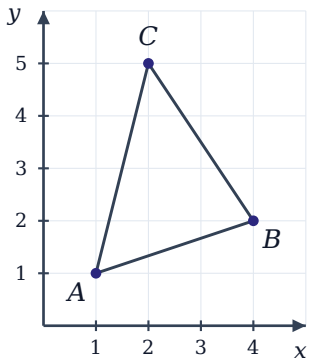
Exercice 14 – Aire d'un triangle et alignement

Dans un repère orthonormé du plan, soient $A(1,1)$, $B(4,2)$ et $C(2,5)$.

a) Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire l'aire du triangle ABC.

b) Le triangle ABC est-il parcouru dans le sens direct ?

c) Pour quelle valeur de m le point $M(m,3)$ est-il aligné avec A et B ?



Le triangle ABC.

Exercice 15 – Synthèse : déterminant à paramètre

Soit $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

a) Calculer $D(x)$.

b) Pour quelles valeurs de x le système homogène associé a-t-il des solutions non nulles ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).