Plaquette 2 – Calculer un déterminant : opérations, factorisations, récurrences

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On ne développe jamais « à l'aveugle » un déterminant d'ordre ≥ 4. On commence par des **opérations élémentaires** qui ne le changent pas ($C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$) pour faire apparaître des zéros ou un **facteur commun** (additionner toutes les colonnes quand les sommes de lignes sont égales). On développe ensuite selon une ligne ou colonne presque nulle. Pour un déterminant de taille n, on cherche une **relation de récurrence** en développant selon la première ligne, puis on la résout (suite récurrente linéaire). Enfin, on reconnaît les formes classiques : triangulaire, par blocs, Vandermonde.

Exercice 1 – Déterminant à paramètre et inversibilité

Soit $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det A_m$ en développant selon la première ligne, puis vérifier par des opérations sur les lignes.

b) Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle inversible ?

c) Pour la valeur exceptionnelle, trouver une relation entre les lignes.

Exercice 2 – Déterminant circulant d'ordre 3

Soient a, b, c réels. Calculer et factoriser

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

a) Justifier que $a+b+c$ divise Δ (en tant que polynôme).

b) Terminer le calcul et montrer que $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

c) En déduire que $\Delta \geq 0$ si $a, b, c \geq 0$, et que $\Delta = 0$ si et seulement si $a+b+c=0$ ou $a=b=c$ (pour a, b, c réels).

Exercice 3 – Diagonale x, ailleurs des 1

Pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent x et tous les autres 1.

a) Calculer $D_2(x)$ et $D_3(x)$ directement.

b) Montrer que $D_n(x) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$.

c) Pour quelles valeurs de x la matrice est-elle non inversible ? Décrire alors son noyau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Le déterminant tridiagonal (−1, 2, −1)

Soit D_n le déterminant de la matrice de taille n ayant des 2 sur la diagonale, des -1 juste au-dessus et juste en dessous, et des 0 ailleurs.

a) Calculer D_1, D_2, D_3.

b) En développant selon la première ligne, montrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

c) En déduire D_n pour tout n.

d) Que dire de l'inversibilité de cette matrice (qui intervient dans la discrétisation de $-u'' = f$) ?

Exercice 5 – Matrice des minimums

Soit $M_n = (\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

a) Écrire M_3 et calculer son déterminant.

b) En effectuant $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i allant de n à 2, montrer que $\det M_n = 1$.

c) En déduire que $M_n = LL^{\mathsf{T}}$ où L est triangulaire inférieure remplie de 1. (Indication : calculer $(LL^{\mathsf{T}})_{ij}$.)

Exercice 6 – La matrice des distances |i − j|

Soit $A_n = (|i-j|)_{1 \leq i,j \leq n}$ $(n \geq 2)$.

a) Calculer $\det A_2$ et $\det A_3$.

b) Effectuer $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ (dans cet ordre) et décrire les lignes obtenues.

c) Recommencer avec les $n-1$ premières lignes obtenues ($L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour $i \leq n-2$) et conclure que

$$\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

d) Vérifier pour $n = 4$.

Exercice 7 – Vandermonde en pratique

a) Calculer $V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ en reconnaissant un déterminant de Vandermonde.

b) Montrer, en utilisant $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, que

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$$

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $(1, \cos, \cos(2\cdot))$ restreinte à $\{a, b, c\}$ soit libre, c'est-à-dire pour que l'interpolation par $\alpha + \beta\cos x + \gamma\cos 2x$ en a, b, c soit possible et unique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Déterminant en flèche

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels avec $a_1, \dots, a_n$ non nuls. On note Δ le déterminant de la matrice de taille $n+1$ dont la première ligne est $(a_0, 1, \dots, 1)$, la première colonne $(a_0, 1, \dots, 1)$, la diagonale $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

a) Écrire la matrice pour $n = 2$ et calculer Δ.

b) Dans le cas général, effectuer $C_1 \leftarrow C_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} C_{k+1}$ et en déduire

$$\Delta = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \right)$$

c) Application : pour quelle valeur de a_0 la matrice est-elle non inversible quand $n = 3$ et $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$?

Exercice 9 – Fibonacci caché dans un déterminant

Soit F_n le déterminant de la matrice tridiagonale de taille n ayant des 1 sur la diagonale, des 1 juste au-dessus et des -1 juste en dessous.

a) Calculer F_1, F_2, F_3.

b) Montrer que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

c) En déduire que F_n est le $(n+1)$-ième terme de la suite de Fibonacci ($1, 1, 2, 3, 5, \dots$), et calculer F_6.

d) Que devient le résultat si l'on remplace les -1 par des $+1$?

Exercice 10 – Coefficients binomiaux

Soit $P_n = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i,j \leq n-1}$ (matrice de Pascal symétrique).

a) Écrire P_3 et calculer son déterminant.

b) En utilisant $\binom{i+j}{i} - \binom{i+j-1}{i-1} = \binom{i+j-1}{i}$ (formule de Pascal), effectuer $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i décroissant de $n-1$ à 1, puis $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ pour j décroissant, et montrer que l'on se ramène à P_{n-1}.

c) Conclure que $\det P_n = 1$ pour tout n.

Exercice 11 – Déterminant triangulaire par blocs

a) Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

b) Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 9 & 9 \end{vmatrix}$ en permutant des colonnes.

c) Montrer par un exemple que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ en général.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Circulant d'ordre 4

Calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a) Factoriser la somme commune des lignes.

b) Faire apparaître des zéros dans la première colonne et terminer.

Exercice 13 – Inversibilité par la parité

a) Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$ et que la parité de $\det A$ ne dépend que de la parité des coefficients.

b) Montrer sans calcul que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible.

c) Montrer qu'une matrice à coefficients entiers, dont les coefficients diagonaux sont impairs et les autres pairs, est inversible.

d) Vérifier b) en calculant $\det A$.

Exercice 14 – Un déterminant qui vaut 4abc

Soient a, b, c réels et $M = \begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det M$ pour $a = b = c = 1$, puis pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

b) Effectuer $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$ et démontrer que $\det M = 4abc$.

c) Pour quelles valeurs de (a, b, c) la matrice M n'est-elle pas inversible ? Pour $a = 0$, exhiber un vecteur non nul du noyau.

Exercice 15 – Synthèse : tridiagonale et polynômes de Tchebychev

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $D_n(x)$ le déterminant de la matrice tridiagonale de taille n ayant des x sur la diagonale et des 1 juste au-dessus et juste en dessous.

a) Montrer que $D_n = xD_{n-1} - D_{n-2}$ (avec $D_0 = 1$, $D_1 = x$).

b) On pose $x = 2\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que $D_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

c) En déduire les valeurs de x pour lesquelles la matrice (de taille n) n'est pas inversible.

d) Vérifier pour $n = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).