Plaquette 5 – Déterminants en situation : polynômes, suites, systèmes

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Le déterminant sert d'**outil de décision** et de **formule fermée** dans des contextes variés : il détecte les valeurs d'un paramètre qui rendent une matrice non inversible (polynôme caractéristique), il dit si deux polynômes ont une racine commune (résultant), il fournit des invariants de suites récurrentes (Cassini, casoratien) et d'équations différentielles (wronskien), il donne la solution d'un système de Cramer sous forme de quotients. On combine à chaque fois la multiplicativité, le développement et les opérations élémentaires.

Exercice 1 – Polynôme caractéristique en taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ et vérifier que $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A$.

b) Pour quelles valeurs de λ le système $AX = \lambda X$ a-t-il des solutions non nulles ? Les déterminer.

c) Montrer la formule de b) pour une matrice 2×2 quelconque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Polynôme caractéristique en taille 3

a) Calculer $\chi_T(\lambda) = \det(T - \lambda I_3)$ pour $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Calculer χ_A pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le factoriser.

c) Pour chaque racine λ de χ_A, déterminer la dimension de $\ker(A - \lambda I_3)$.

Exercice 3 – Le résultant : une racine commune ?

Soient $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X - c$.

a) Montrer que P et Q ont une racine commune si et seulement si $P(c) = 0$.

b) Calculer le déterminant de Sylvester $R = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & 1 & -c \end{vmatrix}$ et vérifier que $R = P(c)$.

c) Interpréter : les lignes de la matrice sont les coefficients de P, Q et XQ. Montrer que si P et Q ont une racine commune r, le vecteur $(r^2, r, 1)$ est dans le noyau.

d) Application : pour quelles valeurs de c les polynômes $X^2 - 3X + 2$ et $X - c$ ont-ils une racine commune ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Discriminant et résultant de P et P’

Soit $P = X^2 + pX + q$, de dérivée $P' = 2X + p$.

a) Montrer que P a une racine double si et seulement si P et P' ont une racine commune.

b) Calculer $R = \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix}$ et faire le lien avec le discriminant.

c) Application : pour quelles valeurs de m le polynôme $X^2 + mX + 4$ a-t-il une racine double ? La donner.

Exercice 5 – Mélange de solutions par les formules de Cramer

Un laboratoire dispose de trois solutions alcooliques à 10 %, 30 % et 50 %. Il veut obtenir 10 L d’une solution à 28 %, en utilisant autant de la solution à 30 % que de celle à 50 %. On note x, y, z les volumes (en L) utilisés.

a) Écrire le système et calculer son déterminant.

b) Résoudre par les formules de Cramer.

c) Vérifier le degré obtenu.

Exercice 6 – Interpolation par un déterminant

a) Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) trois points d’abscisses distinctes. Montrer que la parabole $y = ax^2 + bx + c$ qui les contient a pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

b) Application aux points $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 7)$.

Exercice 7 – L’identité de Cassini

Soit (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$) et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

b) En prenant le déterminant, en déduire l’identité de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

c) Vérifier pour $n = 5$.

d) Application : montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

Exercice 8 – Casoratien de deux suites récurrentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant $w_{n+2} = aw_{n+1} + bw_n$, et $C_n = \begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Écrire $\begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \\ u_{n+2} & v_{n+2} \end{pmatrix}$ comme produit d'une matrice M fixe par $\begin{pmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix}$.

b) En déduire $C_{n+1} = -bC_n$, puis $C_n = (-b)^n C_0$.

c) Montrer que si $b \neq 0$ et $C_0 \neq 0$, alors (u, v) est une base de l'espace des solutions.

d) Vérifier sur $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ solutions de $w_{n+2} = 5w_{n+1} - 6w_n$.

Exercice 9 – Wronskien d'une équation différentielle

Soient p, q réels et y, z deux solutions sur $\mathbb{R}$ de (E):$f'' + pf' + qf = 0$. On pose $W = yz' - y'z$.

a) Montrer que $W' = -pW$, et en déduire $W(x) = W(0)\mathrm{e}^{-px}$.

b) En déduire que W est soit identiquement nul, soit jamais nul.

c) Vérifier sur $y = \mathrm{e}^x$, $z = \mathrm{e}^{2x}$, solutions de $f'' - 3f' + 2f = 0$.

d) Montrer que si $W(0) \neq 0$, (y, z) est libre.

Exercice 10 – Matrice compagnon d'un polynôme

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(XI_3 - C)$ en développant selon la dernière colonne.

b) En déduire une matrice dont le polynôme $\det(XI_3 - C)$ vaut $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, et ses valeurs λ telles que $C - \lambda I_3$ soit non inversible.

c) Pour une racine λ, trouver un vecteur non nul v tel que $C^{\mathsf{T}} v = \lambda v$.

Exercice 11 – Déterminants de Cauchy et de Hilbert

a) Pour a_1, a_2, b_1, b_2 avec $a_i + b_j \neq 0$, montrer que

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}$$

b) En déduire le déterminant de la matrice de Hilbert $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) Calculer $\det H_3$ avec $H_3 = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \le i,j \le 3}$. Que suggère la petitesse de ces déterminants ?

Exercice 12 – Matrices inversibles à coefficients polynomiaux

On considère des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Calculer le déterminant de $M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ X & X^2+1 \end{pmatrix}$ et montrer que M a un inverse à coefficients polynomiaux.

b) Montrer que $N = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 1 & X \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse à coefficients polynomiaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Énoncer une condition nécessaire et suffisante (en termes de $\det M$) pour qu'une matrice 2×2 à coefficients polynomiaux ait un inverse polynomial.

Exercice 13 – Rotations de l'espace

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

a) Calculer $\det R_\theta$, $\det S$ et $\det(R_\theta S)$.

b) Interpréter géométriquement R_θ, S et $R_\pi S$.

c) Montrer que $R_\theta^{\mathsf{T}} R_\theta = I_3$ et en déduire R_θ^{-1}.

d) Une matrice A vérifiant $A^{\mathsf{T}}A = I_3$ et $\det A = -1$ peut-elle être une rotation ? Justifier par l'orientation.

Exercice 14 – Norme d'un produit vectoriel et matrice de Gram

Pour $u, v \in \mathbb{R}^3$, on pose $G(u, v) = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ v \cdot u & v \cdot v \end{vmatrix}$.

a) Calculer $G(u, v)$ et $\|u \wedge v\|^2$ pour $u = (1, 2, 2)$ et $v = (3, 0, 4)$.

b) On admet l'identité de Lagrange $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$. En déduire $G(u, v) \geq 0$, avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

c) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ et l'aire du parallélogramme construit sur u et v.

Exercice 15 – Synthèse : Cayley-Hamilton en taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $t = \mathrm{tr}A$, $\delta = \det A$.

a) Vérifier par le calcul que $A^2 - tA + \delta I_2 = 0$.

b) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Écrire la relation, en déduire A^{-1} et A^3 comme combinaisons de A et I_2.

c) Montrer que pour tout n, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ avec $\alpha_{n+1} = 5\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n$.

d) En déduire que $\alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} + 2\alpha_n$ et relier au polynôme caractéristique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).