Plaquette 4 – Déterminants et géométrie : aires, volumes, alignements

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Dans une base orthonormée directe, le déterminant de deux vecteurs du plan est l'**aire orientée** du parallélogramme qu'ils engendrent, et celui de trois vecteurs de l'espace le **volume orienté** du parallélépipède. Son signe dit l'**orientation**, sa nullité dit la **colinéarité** (ou la coplanarité). On en tire : aires de triangles et de polygones, volumes de tétraèdres, équations de droites, de plans et de cercles sous forme de déterminants, tests d'alignement, de concours, de cocyclicité, et le facteur $|\det f|$ par lequel une application linéaire multiplie les aires.

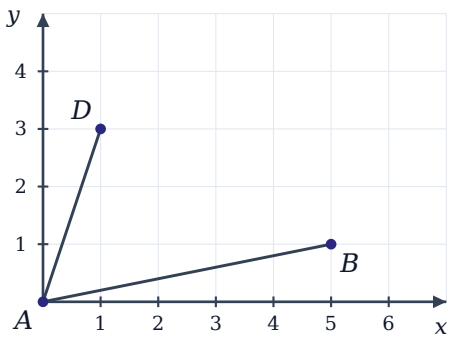
Exercice 1 – Aire d'un parallélogramme

Dans un repère orthonormé, soient $A(0,0)$, $B(5,1)$, $D(1,3)$ et C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

a) Déterminer les coordonnées de C.

b) Calculer l'aire de $ABCD$ et celle du triangle ABD.

c) Calculer la hauteur issue de D dans le triangle ABD.



Les points A, B, D ; C est à construire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Aire d'un quadrilatère : la formule du lacet

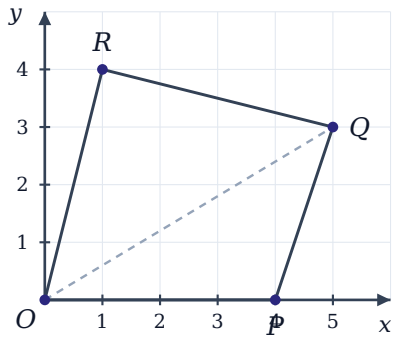
Soit le quadrilatère convexe $OPQR$ avec $O(0,0)$, $P(4,0)$, $Q(5,3)$, $R(1,4)$.

a) Le découper en deux triangles OPQ et OQR et calculer leurs aires à l'aide de déterminants.

b) Vérifier la **formule du lacet** : pour un polygone $M_1 \cdots M_k$ parcouru dans le sens direct,

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \qquad (M_{k+1} = M_1)$$

c) Que devient la somme si l'on parcourt le polygone dans l'autre sens ?



Le quadrilatère OPQR et la diagonale [OQ].

Exercice 3 – Équation d'une droite en déterminant

a) Montrer que la droite passant par deux points distincts $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Application : droite passant par $A(1,2)$ et $B(3,7)$.

c) Les points $A(1,2)$, $B(3,7)$ et $C(-1,-3)$ sont-ils alignés ?

Exercice 4 – Trois droites concourantes

On considère les droites $D_1 : x + y - 3 = 0$, $D_2 : 2x - y = 0$ et $D_c : x + 2y + c = 0$.

a) Déterminer le point d'intersection de D_1 et D_2 par les formules de Cramer.

b) Pour quelle valeur de c les trois droites sont-elles concourantes ?

c) Montrer que, pour trois droites $a_i x + b_i y + c_i = 0$ deux à deux sécantes, elles sont concourantes si et seulement si $\det(a_i \;\; b_i \;\; c_i)_i = 0$, et vérifier sur b).

Exercice 5 – Volume d'un tétraèdre

Dans un repère orthonormé de l'espace, soient $A(0,0,0)$, $B(1,2,0)$, $C(0,1,3)$ et $D(2,0,1)$.

a) Calculer $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

b) En déduire le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs, puis celui du tétraèdre $ABCD$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide du produit vectoriel, puis la distance de D au plan (ABC).

Exercice 6 – Quatre points coplanaires

Soient $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ et $M_t(t,t,t)$.

a) Pour quelle valeur de t les quatre points sont-ils coplanaires ?

b) Déterminer une équation du plan (ABC) en écrivant $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$ pour $M(x,y,z)$.

c) Interpréter a) géométriquement.

Exercice 7 – Vecteur normal par le produit vectoriel

Soient $A(1,1,0)$, $B(2,0,1)$, $C(0,2,3)$.

a) Calculer $n=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et vérifier qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une équation du plan (ABC).

c) Montrer que pour tout w, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},w\right)=n\cdot w$, et retrouver b) avec $w=\overrightarrow{AM}$.

Exercice 8 – Comment une application linéaire change les aires

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'image du carré unité $[0,1]^2$ et calculer son aire.

b) Soit T un triangle de sommets P, Q, R. Montrer que l'aire de $f(T)$ vaut $|\det A|$ fois celle de T.

c) Quelle est l'aire de l'image du disque unité ? (On admettra que le facteur $|\det A|$ vaut pour toute figure.)

d) Pour quelles matrices A l'application conserve-t-elle toutes les aires ? Donner un exemple qui n'est pas une isométrie.

Exercice 9 – Orientation d'une base

Une base (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$ est dite **directe** si $\det(u,v,w)>0$ (dans la base canonique).

a) Les bases $((1,0,0),(0,0,1),(0,1,0))$ et $((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ sont-elles directes ?

b) Que devient l'orientation si l'on échange deux vecteurs ? si l'on permute circulairement les trois ?

c) Montrer qu'une rotation (matrice orthogonale de déterminant 1) transforme une base directe en base directe, et une symétrie par rapport à un plan en base indirecte.

Exercice 10 – Cercle par trois points et cocyclicité

a) Montrer que, pour trois points non alignés $A_i(x_i,y_i)$, le cercle qui les contient a pour équation

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Application : $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$. Retrouver le cercle unité.

c) Le point $D\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ est-il sur ce cercle ? Et $E(1,1)$?

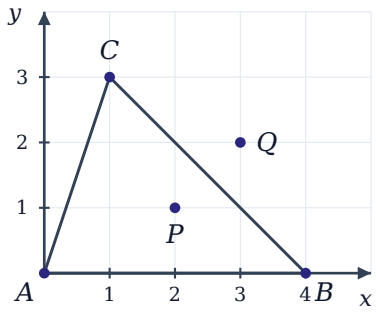
Exercice 11 – Un point est-il dans le triangle ?

Soient $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(1,3)$ et un point M.

a) Montrer que M est strictement à l'intérieur du triangle ABC (parcouru dans le sens direct) si et seulement si les trois déterminants $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, $\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM})$, $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})$ sont strictement positifs.

b) Tester les points $P(2,1)$ et $Q(3,2)$.

c) Vérifier que la somme des aires orientées MAB, MBC, MCA vaut l'aire de ABC pour P.



Le triangle ABC et les deux points testés.

Exercice 12 – Distance d'un point à une droite

Soient $A(1,2)$, $B(5,5)$ et $M(4,0)$.

a) Exprimer la distance d de M à la droite (AB) à l'aide de $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ et de AB.

b) Calculer d.

c) Retrouver le résultat avec l'équation cartésienne de (AB) et la formule $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 13 – Déterminant, produit scalaire et angle

Pour $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$ dans le plan euclidien, on note $u \cdot v = ac + bd$.

a) Montrer l'identité de Lagrange : $\det(u,v)^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

b) En déduire que si $u, v \neq 0$, il existe θ tel que $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos\theta$ et $\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin\theta$.

c) Application : $u = (3,1)$, $v = (1,2)$. Calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ et θ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Aire sous une transformation affine du plan

On considère l'application $g(x, y) = (x + 2y + 1,\ 3x + y - 2)$ du plan dans lui-même.

a) Écrire g comme la composée d'une application linéaire f et d'une translation. Préciser la matrice de f.

b) Calculer l'image du triangle $O(0, 0)$, $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ et son aire.

c) L'application g conserve-t-elle l'orientation ?

d) Un champ rectangulaire de 2 hectares est représenté par g sur une carte : quelle aire occupe son image ?

Exercice 15 – Synthèse : image d'un disque par une transvection

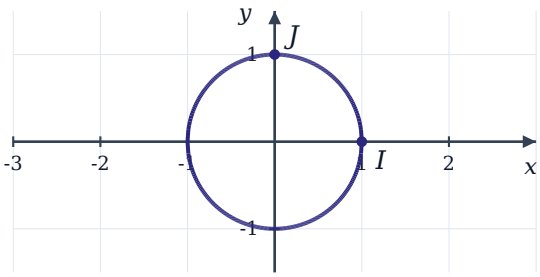
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et D le disque unité.

a) Calculer $\det A$ et l'aire de $f(D)$.

b) Montrer que $(x, y) \in f(D) \Leftrightarrow \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1$.

c) Vérifier que les points $f(1, 0) = (2, 0)$ et $f(0, 1) = (1, 1)$ sont sur le bord de $f(D)$.

d) Retrouver l'aire par le changement de variable ou l'intégrale (on admettra que l'ellipse $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \leq 1$ a pour aire πab ; ici on se ramènera à ce cas par f^{-1}).



Le disque unité, avant transformation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).