Plaquette 3 – Propriétés du déterminant : produit, inversibilité, comatrice

Déterminants — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Beaucoup de questions se règlent **sans calculer** un déterminant, en utilisant ses propriétés : il est **multiplicatif** ($\det(AB) = \det A \det B$), invariant par transposition, homogène de degré n, non nul exactement pour les matrices inversibles. On en tire des obstructions (« $A^2 = -I_n$ est impossible en dimension impaire »), des valeurs forcées (projecteurs, matrices orthogonales, nilpotentes), des résultats d'arithmétique (inverse à coefficients entiers) et la formule de la **comatrice**, qui exprime A^{-1} avec des déterminants.

Exercice 1 – Obstructions par le déterminant

Soit $n \geq 1$.

a) Montrer qu'il n'existe pas de $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$ lorsque n est impair.

b) Exhiber une telle matrice pour $n = 2$, puis pour $n = 4$.

c) Existe-t-il $A \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = -I_3$?

d) Montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $AB = -BA$ avec n impair, alors A ou B n'est pas inversible.

Exercice 2 – Valeurs forcées du déterminant

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Que peut valoir $\det A$ si :

a) A est nilpotente ($A^k = 0$ pour un $k \geq 1$) ?

b) A est un projecteur ($A^2 = A$) ?

c) $A^{\mathsf{T}}A = I_n$ (matrice orthogonale) ?

d) $A^3 = I_n$?

Donner un exemple réalisant chaque valeur possible.

Exercice 3 – Déterminant d'un endomorphisme de matrices

a) Soit $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{\mathsf{T}}$. Calculer $\det T$ (dans une base adaptée à $S_2 \oplus A_2$, puis dans la base canonique).

b) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $L_A : M \mapsto AM$. Montrer que $\det L_A = (\det A)^2$.

c) Soit $\sigma : P \mapsto P(-X)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\det \sigma$.

d) Soit $\tau : P \mapsto P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\det \tau$ sans calcul matriciel détaillé.

Exercice 4 – Inverse par la comatrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer $\det A$.

b) Calculer la comatrice de A.

c) En déduire A^{-1} et vérifier une ligne du produit AA^{-1}.

d) Résoudre $AX = (1,0,0)^{\mathsf{T}}$ par les formules de Cramer et comparer avec la première colonne de A^{-1}.

Exercice 5 – Inverse à coefficients entiers

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

a) Montrer que si A est inversible et $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A = \pm 1$.

b) Réciproquement, montrer que si $\det A = \pm 1$, alors A^{-1} est à coefficients entiers.

c) Application : $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ont-elles un inverse entier ?

d) Montrer que les matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 forment un groupe pour le produit.

Exercice 6 – Déterminant de la comatrice

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$, $n \geq 2$.

a) Montrer que si A est inversible, $\det(\mathrm{com} A) = (\det A)^{n-1}$.

b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

c) Montrer que si $\mathrm{rg} A \leq n-2$, alors $\mathrm{com} A = 0$.

d) Montrer que si $\mathrm{rg} A = n-1$, alors $\mathrm{com} A \neq 0$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{com} A) = 1$ (utiliser $A(\mathrm{com} A)^{\mathsf{T}} = 0$).

Exercice 7 – Rang par les mineurs

Soit $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, où $t \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $\det A_t$. Peut-on avoir $\mathrm{rg} A_t = 3$?

b) Trouver un mineur d'ordre 2 non nul indépendant de t. En déduire $\mathrm{rg} A_t$.

c) Même question pour $B_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: rang selon t.

Exercice 8 – Perturber une matrice non inversible

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $t \mapsto \det(A + tI_n)$ est une fonction polynomiale de degré n, de coefficient dominant 1.

b) En déduire que $A + tI_n$ est inversible sauf pour au plus n valeurs de t, et qu'il existe une suite $t_k \to 0$ avec $A + t_k I_n$ inversible.

c) Application : montrer que $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$ pour A inversible, puis pour A quelconque (par passage à la limite).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Vérifier c) pour $A = E_{11}$ et $B = E_{12}$ dans M_2.

Exercice 9 – Déterminant dans une base et changement de base

Soit $E = \mathbb{R}^2$, B la base canonique et $B' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,2)$.

a) Pour $v = (a,b)$ et $w = (c,d)$, calculer $\det_B(v,w)$.

b) Déterminer les coordonnées de v et w dans B', puis $\det_{B'}(v,w)$.

c) Vérifier la formule $\det_{B'}(v,w) = \det_{B'}(B) \times \det_B(v,w)$.

d) Interpréter : « l'aire » mesurée dans la base B' est-elle la même que dans B ?

Exercice 10 – Un système de Cramer à paramètre

Soit $a \in \mathbb{R}$ et le système

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) Calculer le déterminant du système et donner les valeurs de a pour lesquelles il est de Cramer.

b) Dans ce cas, résoudre par les formules de Cramer (on pourra d'abord calculer $x + y + z$).

c) Étudier les cas $a = 1$ et $a = -2$.

Exercice 11 – Le déterminant n'est pas linéaire

a) Trouver $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

b) Montrer que $\det(A+B)$ vaut $\det A + \det B + (\det(a_1, b_2) + \det(b_1, a_2))$ en taille 2, où a_j, b_j désignent les colonnes.

c) Soit A inversible et E la matrice dont seule la première colonne est non nulle, égale à u. Montrer que $\det(A+E) = \det A\,(1 + x_1)$, où x_1 est la première coordonnée de $A^{-1}u$.

d) Application : $A = I_3$, $u = (2,1,5)$.

Exercice 12 – Le wronskien et la liberté de fonctions

Pour trois fonctions f, g, h deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, on pose

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f''(x) & g''(x) & h''(x) \end{vmatrix}$$

a) Montrer que si (f, g, h) est liée, W est identiquement nul.

b) En déduire que si $W(x_0) \neq 0$ pour un x_0, la famille est libre.

c) Calculer W pour $f = \mathrm{e}^x$, $g = \mathrm{e}^{2x}$, $h = \mathrm{e}^{3x}$ et conclure.

d) Calculer W pour $(1, \cos^2 x, \sin^2 x)$ et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Le déterminant de la transposée et les lignes

a) Pourquoi toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes valent-elles aussi pour les lignes ?

b) Montrer que si une matrice a une ligne nulle ou deux lignes proportionnelles, son déterminant est nul.

c) Soit A dont les lignes $L_1, \dots, L_n$ vérifient $L_1 + L_2 + \dots + L_n = 0$. Que vaut $\det A$?

d) Application : sans calcul, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = ?$

Exercice 14 – Déterminant d'une matrice de rang 1 plus l'identité

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ (colonnes) et $M = I_n + uv^{\mathsf{T}}$.

a) Si $u = 0$, que vaut $\det M$?

b) Pour $u \neq 0$, montrer que l'hyperplan $H = \{x \mid v^{\mathsf{T}}x = 0\}$ vérifie $Mx = x$ pour $x \in H$, et que $Mu = (1 + v^{\mathsf{T}}u)u$.

c) On suppose $v^{\mathsf{T}}u \neq 0$, de sorte que $u \notin H$. En utilisant une base adaptée à $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$, montrer que $\det M = 1 + v^{\mathsf{T}}u$.

d) Application : calculer $\det(I_n + J_n)$, où J_n est la matrice remplie de 1, et comparer avec la formule « diagonale x, ailleurs 1 ».

Exercice 15 – Synthèse : le déterminant de Vandermonde en taille n

Soient $x_1, \dots, x_n$ des scalaires et $V(x_1, \dots, x_n) = \det\left(x_i^{j-1}\right)_{1 \le i,j \le n}$.

a) Pour $x_1, \dots, x_{n-1}$ fixés, montrer que $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ est un polynôme de degré $\le n-1$, dont le coefficient de X^{n-1} est $V(x_1, \dots, x_{n-1})$.

b) Montrer que $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de P.

c) En déduire $V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$, puis la formule générale.

d) En déduire que $V \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts, et interpréter en termes d'interpolation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).