Plaquette 4 – Changements de variable et de fonction

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation d'Euler sur $]0,+\infty[$, avec $x=\mathrm{e}^t$ et $z(t)=y(\mathrm{e}^t)$:

$$xy'(x)=z'(t),\qquad x^2y''(x)=z''(t)-z'(t)$$

- donc $x^2y''+axy'+by=0$ devient $z''+(a-1)z'+bz=0$, à coefficients constants.
- **Bernoulli** $y'+a(x)y=b(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$: $z=y^{1-n}$ vérifie $z'+(1-n)a(x)z=(1-n)b(x)$.
- **Solution connue** y_1 (ne s'annulant pas) : poser $y=y_1z$; l'équation en z' est d'ordre 1.
- **Reconnaître une dérivée** : $(p(x)y')'=py''+p'y'$.
- **Équation fonctionnelle** : dériver par rapport à l'une des variables puis fixer l'autre.

Correction de l'exercice 1 – Équation d'Euler, racines distinctes

a) $z'(t)=\mathrm{e}^ty'(\mathrm{e}^t)=xy'(x)$ et $z''(t)=\mathrm{e}^ty'(\mathrm{e}^t)+\mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t)=xy'+x^2y''$. D'où

$$x^2y''=z''-z',\qquad xy'=z'$$

b) L'équation devient $z''-z'+z'-z=z''-z=0$: $z(t)=\lambda\mathrm{e}^t+\mu\mathrm{e}^{-t}$.

c) $t=\ln x$: $y(x)=\lambda x+\frac{\mu}{x}$. Vérification pour $\frac{1}{x}$: $x^2\cdot\frac{2}{x^3}+x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{x}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ ✓.
(Raccourci : chercher $y=x^r$ donne $r(r-1)+r-1=0$, $r=\pm1$.)

Réponse. $y(x)=\lambda x+\frac{\mu}{x}$.

Correction de l'exercice 2 – Équation d'Euler, racine double

Avec $x=\mathrm{e}^t$: $(z''-z')-3z'+4z=0$, soit

$$z''-4z'+4z=0,\qquad (r-2)^2=0$$

- $z(t)=(\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{2t}$, donc $y(x)=(\lambda+\mu\ln x)\,x^2$.
- **Conditions** : $y(1)=\lambda=1$; $y'(x)=\frac{\mu}{x}x^2+2x(\lambda+\mu\ln x)$, $y'(1)=\mu+2=0$, $\mu=-2$.
- $y(x)=x^2(1-2\ln x)$.
- **Remarque** : la racine double de l'équation en t produit un facteur $\ln x$; la recherche naïve de solutions x^r n'en donne qu'une.

Réponse. $y=(\lambda+\mu\ln x)x^2$; $y=x^2(1-2\ln x)$.

Correction de l'exercice 3 – Équation d'Euler oscillante

Avec $x=\mathrm{e}^t$: $z''-z'+z'+z=0$, soit $z''+z=0$:

$$z(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t,\qquad y(x)=\lambda\cos(\ln x)+\mu\sin(\ln x)$$

- Une solution non nulle s'écrit $A\cos(\ln x-\varphi)$ $(A>0)$. Elle s'annule quand $\ln x=\varphi+\frac{\pi}{2}+k\pi$, soit $x_k=\mathrm{e}^{\varphi+\pi/2+k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$.
- Sur $]0,1]$ $(\ln x\leq 0)$: une **infinité** de zéros, qui s'accumulent en 0 $(k\to-\infty)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Sur $[1, +\infty[$: aussi une infinité, mais de plus en plus espacés (rapport $e^{\pi} \approx 23$ entre deux zéros consécutifs).

Réponse. $y = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$; une infinité de zéros de chaque côté de 1.

Correction de l'exercice 4 – Équation de Bernoulli

a) $z' = -\frac{y'}{y^2}$. On divise l'équation par y^2 : $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 1$, soit

$$-z' + z = 1 \Leftrightarrow z' - z = -1$$

— $z = 1 + Ce^x$.

b) $y = \frac{1}{1 + Ce^x}$ (là où le dénominateur ne s'annule pas). $y(0) = \frac{1}{1+C} = \frac{1}{2}$: $C = 1$, $y = \frac{1}{1+e^x}$, définie sur $\mathbb{R}$, décroissant de 1 à 0.

c) $\frac{1}{1+C} = 2$: $C = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{2 - e^x}$. Le dénominateur s'annule en $x = \ln 2$: la solution **explose** ($y \to +\infty$) quand $x \to \ln 2^-$. Contrairement au cas linéaire, une équation non linéaire peut avoir des solutions définies sur un intervalle borné.

Réponse. $y = \frac{1}{1+Ce^x}$; $y(0) = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{1+e^x}$; $y(0) = 2$: explosion en $\ln 2$.

Correction de l'exercice 5 – Équation de Riccati avec une solution connue

a) $y_1' = 1$ et $y_1^2 - x^2 + 1 = 1$ ✓.

b) $y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$ et $y^2 = x^2 + \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2}$. L'équation devient

$$1 - \frac{z'}{z^2} = \frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} + 1 \Leftrightarrow -z' = 2xz + 1$$

— (on a multiplié par z^2).

c) Homogène : $z = Ce^{-x^2}$. Variation de la constante : $C'(x)e^{-x^2} = -1$, $C(x) = K - \int_0^x e^{t^2}\,dt$. Donc

— $y(x) = x + \dfrac{e^{x^2}}{K - \int_0^x e^{t^2}\,dt}$, plus la solution $y = x$ (obtenue pour « $K = \infty$ »).

Réponse. $y = x + \dfrac{e^{x^2}}{K - \int_0^x e^{t^2}dt}$, ou $y = x$.

Correction de l'exercice 6 – Changement de fonction z = xy

a) $z' = y + xy'$ et $z'' = 2y' + xy''$: l'équation s'écrit exactement

$$z'' - z = 0$$

b) $z = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$, donc $y(x) = \dfrac{\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}{x}$.

c) $\frac{\operatorname{sh} x}{x} \to 1$ en 0, mais $\frac{\operatorname{ch} x}{x} \to +\infty$. Les solutions ayant une limite finie sont les $\mu\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ (limite μ) : il faut $\lambda = 0$.

Réponse. $y = \frac{\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}{x}$; limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = 0$.

Correction de l'exercice 7 – Changement de variable x = sin t

a) $z' = \cos t\, y'(\sin t)$, $z'' = -\sin t\, y' + \cos^2 t\, y''$. Comme $\cos^2 t = 1 - x^2$:

$$z''(t) = (1 - x^2)y''(x) - xy'(x)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) L'équation devient $z'' + z = 0$: $z = \lambda \sin t + \mu \cos t$. Avec $\sin t = x$ et $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$ (positif sur l'intervalle) : $y = \lambda x + \mu\sqrt{1 - x^2}$.

c) $y = x$: $0 - x + x = 0$ ✓. $y(0) = \mu = 1$; $y'(x) = \lambda - \dfrac{\mu x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y'(0) = \lambda = 0$: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Réponse. $y = \lambda x + \mu\sqrt{1 - x^2}$; $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Correction de l'exercice 8 – Variables séparables

Méthode : isoler y d'un côté pour reconnaître une dérivée, $g(y)y' = f(x)$, puis intégrer :

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad \text{avec } G' = g,\ F' = f$$

a) $(y^2)' = 2yy' = 2x$, donc $y^2 = x^2 + C$; $y(0) = 1$ donne $C = 1$ et $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (sur $\mathbb{R}$).

b) $\dfrac{y'}{y^2} = x$, soit $\left(-\dfrac{1}{y}\right)' = x$: $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} - 1$, $y = \dfrac{2}{2 - x^2}$. Définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ (intervalle contenant 0 où le dénominateur ne s'annule pas) : explosion en $\pm\sqrt{2}$.

c) $e^y y' = 1$: $e^y = x + 1$, $y = \ln(1 + x)$, définie sur $]-1, +\infty[$.

Réponse. a) $\sqrt{x^2 + 1}$ · b) $\dfrac{2}{2 - x^2}$ sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ · c) $\ln(1 + x)$.

Correction de l'exercice 9 – Équations fonctionnelles

a) À x fixé, on dérive par rapport à y : $f'(x + y) = f(x)f'(y)$. En $y = 0$, avec $a = f'(0)$:

$$f'(x) = af(x), \quad f(0) = 1 \Longrightarrow f(x) = e^{ax}$$

— Réciproque : $e^{a(x+y)} = e^{ax}e^{ay}$ ✓.

b) $f'(x + y) = f'(y)$; en $y = 0$: $f'(x) = f'(0) = a$, et $f(0) = 2f(0)$ impose $f(0) = 0$. Donc $f(x) = ax$ (réciproque immédiate).

c) Deux dérivations en y : $f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(x)f''(y)$; en $y = 0$: $f'' = kf$ avec $k = f''(0)$. De plus, en $x = 0$: $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, donc f est **paire** et $f'(0) = 0$.

— $k = -\omega^2 < 0$: $f = \cos \omega x$; $k = 0$: $f = 1$; $k = \omega^2 > 0$: $f = \operatorname{ch} \omega x$. On vérifie : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b$, de même pour ch ✓.

Réponse. a) e^{ax} · b) ax · c) $\cos \omega x$, 1 ou $\operatorname{ch} \omega x$.

Correction de l'exercice 10 – Reconnaître une dérivée à l'ordre 2

Le membre de gauche est la dérivée d'un produit :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = ((1 + x^2)y')'$$

a) $(1 + x^2)y' = C$, donc $y' = \dfrac{C}{1 + x^2}$ et $y = C \arctan x + D$.

b) $((1 + x^2)y')' = 2x$ donne $(1 + x^2)y' = x^2 + C$, soit $y' = 1 + \dfrac{C - 1}{1 + x^2}$ et $y = x + (C - 1)\arctan x + D$.

c) $y(0) = D = 0$; $y'(0) = 1 + C - 1 = C = 1$. Donc $y = x$ (vérification : $0 + 2x \cdot 1 = 2x$ ✓).

Réponse. a) $C \arctan x + D$ · b) $x + K \arctan x + D$ · c) $y = x$.

Correction de l'exercice 11 – Solutions polynomiales

a) Terme de degré n : $-n(n - 1)a$ (venant de $-x^2y''$), $-2na$ (de $-2xy'$), $6a$. Il doit être nul :

$$-n(n - 1) - 2n + 6 = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 2 \text{ (ou } n = -3)$$

b) $y = ax^2 + bx + c$: $(1 - x^2)2a - 2x(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = (2a + 6c) + 4bx$. Donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$b = 0$ et $c = -\frac{a}{3}$: $y = a\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$.

c) $P_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ est de cette forme ✓. $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2-1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x^3 - x]_{-1}^{1} = 0$: P_2 est orthogonal aux constantes (propriété des polynômes de Legendre).

Réponse. $n = 2$; solutions $a(3x^2 - 1)$; $\int_{-1}^{1} P_2 = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Supprimer le terme en y'

a) Avec $u = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $u' = -xu$, $u'' = (x^2 - 1)u$:

— $y' = (z' - xz)u$;
— $y'' = (z'' - 2xz' + (x^2 - 1)z)u$.

b) On reporte et on divise par $u > 0$:

$$z'' - 2xz' + (x^2 - 1)z + 2x(z' - xz) + (x^2 + 2)z = z'' + z = 0$$

— Donc $z = \lambda \cos x + \mu \sin x$ et $y = \mathrm{e}^{-x^2/2}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.

c) Dans $y'' + p(x)y' + \ldots$, le terme en z' vaut $(2u' + pu)z'$: il disparaît si $u' = -\frac{p}{2}u$, soit ici $u' = -xu$, c'est-à-dire $u = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Réponse. $y = \mathrm{e}^{-x^2/2}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.

Correction de l'exercice 13 – Abaisser l'ordre avec une solution connue

a) $y_1 = y_1' = y_1'' = \mathrm{e}^x$: $x\mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = 0$ ✓. Pour $y = ax + b$:
$-(x+1)a + ax + b = b - a = 0$, donc $y = a(x+1)$.

b) Si $\alpha \mathrm{e}^x + \beta(x+1) = 0$ pour tout $x > 0$, la limite en $+\infty$ après division par e^x donne $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. L'espace des solutions (dimension 2, coefficient de y'' non nul sur l'intervalle) est donc $\{\lambda \mathrm{e}^x + \mu(x+1)\}$.

c) $y = z\mathrm{e}^x$, $y' = (z' + z)\mathrm{e}^x$, $y'' = (z'' + 2z' + z)\mathrm{e}^x$. Après simplification par e^x :

$$xz'' + (x-1)z' = 0, \quad \text{soit } w' = \left(\frac{1}{x} - 1\right)w$$

— $w = Cx\mathrm{e}^{-x}$, et $z = \int Cx\mathrm{e}^{-x} = -C(x+1)\mathrm{e}^{-x} + D$. D'où $y = -C(x+1) + D\mathrm{e}^x$ ✓.

Réponse. $y = \lambda \mathrm{e}^x + \mu(x+1)$.

Correction de l'exercice 14 – Ordre 2 et exponentielle complexe

a) $z' = y'' + i\omega y' = -\omega^2 y + i\omega y' = i\omega(y' + i\omega y) = i\omega z$. Équation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant (complexe) :

$$z(t) = z(0)\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

b) y est réel, donc $\omega y = \mathrm{Im}\, z$. Avec $z(0) = a + ib$:
$\omega y = \mathrm{Im}((a + ib)(\cos \omega t + i \sin \omega t)) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$. On retrouve $y = \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$.

c) $|z|^2 = y'^2 + \omega^2 y^2 = E$ et $|z(t)| = |z(0)|$: E est constante. Physiquement : conservation de l'énergie $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (à un facteur près).

Réponse. $z = z(0)\mathrm{e}^{i\omega t}$; $y = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\, z$; $E = |z|^2$ constante.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : équation d'Euler avec second membre

a) $x^2 y'' = z'' - z'$, $xy' = z'$, $x^3 = \mathrm{e}^{3t}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$z'' - z' - 2z' + 2z = \mathrm{e}^{3t} \Leftrightarrow z'' - 3z' + 2z = \mathrm{e}^{3t}$$

b) $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$; $P(3) = 2$: $z = \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$.

c) $y(x) = \lambda x + \mu x^2 + \frac{x^3}{2}$. Conditions : $\lambda + \mu + \frac{1}{2} = 0$ et $\lambda + 2\mu + \frac{3}{2} = 0$, d'où $\mu = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$:

— $y(x) = \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} = \frac{x(x-1)^2}{2}$.

— Vérification : $y'' = 3x - 2$, $y' = \frac{1}{2} - 2x + \frac{3}{2}x^2$;
$x^2(3x-2) - 2x\left(\frac{1}{2} - 2x + \frac{3}{2}x^2\right) + (x - 2x^2 + x^3) = x^3$ ✓.

d) $y(x) \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, nulle seulement en 1 (où la courbe est tangente à l'axe), et $y \to +\infty$ comme $\frac{x^3}{2}$.

Réponse. $y = \lambda x + \mu x^2 + \frac{x^3}{2}$; $y = \frac{x(x-1)^2}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).