Plaquette 1 – Équations linéaires d'ordre 1 et 2 : résolution et problèmes de Cauchy

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ordre 1 : $y' = a(x)y + b(x)$ **sur un intervalle** I**.**

— **Équation homogène** $y' = a(x)y$: les solutions sont $y(x) = C\,\mathrm{e}^{A(x)}$ où A est une primitive de a et $C \in \mathbb{R}$.

— **Structure de l'ensemble des solutions** :

$$y_{\text{générale}} = y_{\text{homogène}} + y_{\text{particulière}}$$

— **Variation de la constante** : on cherche $y(x) = C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$; il reste $C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$.

— **Problème de Cauchy** : $y' = a(x)y + b(x)$ avec $y(x_0) = y_0$ admet une **unique** solution sur I (théorème de Cauchy linéaire).

Ordre 2 à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = 0$ **(**$a \neq 0$**).**

Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant Δ :

— $\Delta > 0$, racines réelles $r_1 \neq r_2$: $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 x} + \mu \mathrm{e}^{r_2 x}$;

— $\Delta = 0$, racine double r : $y(x) = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{rx}$;

— $\Delta < 0$, racines $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$: $y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$.

Second membre polynomial ou exponentiel : on cherche une solution particulière « de la même forme » (polynôme de même degré, $k\mathrm{e}^{mx}$, $\lambda\cos + \mu\sin$).

Principe de superposition : si y_1 résout l'équation de second membre b_1 et y_2 celle de second membre b_2, alors $y_1 + y_2$ résout celle de second membre $b_1 + b_2$.

Correction de l'exercice 1 – Équation homogène

Ici $a(x) = 3$, donc $A(x) = 3x$.

— Les solutions générales sont $y(x) = C\mathrm{e}^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

— **Condition initiale** : $y(0) = C\mathrm{e}^{0} = C = 2$.

— **Solution du problème de Cauchy** : $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

— **Vérification** : $y'(x) = 6\mathrm{e}^{3x} = 3 \times 2\mathrm{e}^{3x} = 3y(x)$. Cohérent, et $y(0) = 2$.

— **Unicité** : le théorème de Cauchy linéaire garantit qu'il n'y a pas d'autre solution.

Réponse. $y(x) = C\mathrm{e}^{3x}$; avec $y(0) = 2$: $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

Correction de l'exercice 2 – Second membre constant

Homogène : $y' = -2y$ donne $y_h(x) = C\mathrm{e}^{-2x}$.

Particulière : le second membre est constant, on cherche une **constante** $y_p = k$.

— Alors $y_p' = 0$ et l'équation devient $2k = 6$, soit $k = 3$.

— **Solution générale** : $y(x) = 3 + C\mathrm{e}^{-2x}$.

— **Comportement** : toutes les solutions tendent vers 3 en $+\infty$; $y_p = 3$ est l'**état d'équilibre** du système.

— **Vérification** : $y' = -2C\mathrm{e}^{-2x}$ et $y' + 2y = -2C\mathrm{e}^{-2x} + 6 + 2C\mathrm{e}^{-2x} = 6$. Cohérent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $y(x) = 3 + Ce^{-2x}$.

Correction de l'exercice 3 – Second membre polynomial

Homogène : $y_h(x) = Ce^{x}$.

Particulière : le second membre est un polynôme de degré 1, on cherche $y_p(x) = ax + b$.

— $y_p' - y_p = a - ax - b = -ax + (a - b)$.
— Identification avec x : $-a = 1$ donc $a = -1$; et $a - b = 0$ donc $b = a = -1$.
— Ainsi $y_p(x) = -x - 1$.
— **Solution générale** : $y(x) = -x - 1 + Ce^{x}$.
— **Vérification** : $y' = -1 + Ce^{x}$, donc $y' - y = -1 + Ce^{x} + x + 1 - Ce^{x} = x$. Cohérent.

Réponse. $y(x) = -x - 1 + Ce^{x}$.

Correction de l'exercice 4 – Coefficient variable

Sur $]0\,;+\infty[$ on divise par x : $y' + \dfrac{1}{x}y = x$.

— **Homogène** : $a(x) = -\dfrac{1}{x}$, primitive $A(x) = -\ln x$, donc $y_h(x) = Ce^{-\ln x} = \dfrac{C}{x}$.
— **Particulière** : on cherche $y_p(x) = \alpha x^2$. Alors $y_p' = 2\alpha x$ et

$$2\alpha x + \frac{\alpha x^2}{x} = 3\alpha x = x \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \frac{1}{3}$$

— **Solution générale** : $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$.
— **Astuce de reconnaissance** : le membre de gauche $xy' + y$ est exactement $(xy)'$. L'équation s'écrit $(xy)' = x^2$, donc $xy = \dfrac{x^3}{3} + C$ — on retrouve le même résultat immédiatement.

Réponse. $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 5 – Variation de la constante

Homogène : $y_h(x) = Ce^{-x}$.

Variation de la constante : on pose $y(x) = C(x)e^{-x}$.

— Alors $y' = C'e^{-x} - Ce^{-x}$ et $y' + y = C'(x)e^{-x}$.
— L'équation devient $C'(x) = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}}$.
— C'est une forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = 1 + e^{x} > 0$: $C(x) = \ln(1 + e^{x}) + K$.
— **Solution générale** : $y(x) = e^{-x}(\ln(1 + e^{x}) + K)$.
— **Quand l'utiliser** : dès que le second membre n'a pas une forme « devinable » (ici ni polynôme, ni exponentielle simple), la variation de la constante est la méthode systématique.

Réponse. $y(x) = e^{-x}(\ln(1 + e^{x}) + K)$.

Correction de l'exercice 6 – Ordre 2, deux racines réelles

Équation caractéristique : $r^2 - r - 6 = 0$.

— $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $r = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, soit $r_1 = 3$ et $r_2 = -2$.
— **Solution générale** :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x}$$

— **Conditions** : $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(x) = 3\lambda e^{3x} - 2\mu e^{-2x}$ donne $3\lambda - 2\mu = 0$.
— De la seconde, $\mu = \frac{3\lambda}{2}$; en reportant : $\lambda + \frac{3\lambda}{2} = 1$, donc $\frac{5\lambda}{2} = 1$, $\lambda = \frac{2}{5}$ et $\mu = \frac{3}{5}$.
— **Solution** : $y(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$.
— **Vérification** : $y(0) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$ et $y'(0) = 1{,}2 - 1{,}2 = 0$. Cohérent.

Réponse. $y(x) = \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{3}{5}e^{-2x}$.

Correction de l'exercice 7 – Ordre 2, racine double

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$.

— Racine **double** $r = 2$, donc $\Delta = 0$.
— **Solution générale** : $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$.
— **Vérification avec** $\lambda = 0$**,** $\mu = 1$: $y = xe^{2x}$, $y' = (1+2x)e^{2x}$, $y'' = (4+4x)e^{2x}$.

$$y'' - 4y' + 4y = (4 + 4x - 4 - 8x + 4x)e^{2x} = 0$$

— Cohérent : le terme en xe^{rx} est bien solution dans le cas de la racine double.
— **Piège** : écrire $\lambda e^{2x} + \mu e^{2x}$ ne donne qu'une seule constante et ne décrit pas l'espace des solutions, qui est de **dimension 2**.

Réponse. $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 8 – Ordre 2, racines complexes

Première équation : $r^2 + 4 = 0$ donne $r = \pm 2\mathrm{i}$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$).

— $y(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$: c'est l'**oscillateur harmonique** non amorti, de pulsation $\omega = 2$ et de période π.

Deuxième équation : $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = 4 - 20 = -16$.

— Racines $r = \frac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.
— $y(x) = e^{-x}(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$.
— **Interprétation physique** : oscillation de pulsation 2 dont l'amplitude décroît en e^{-x} — un **régime pseudo-périodique amorti** (circuit RLC, masse-ressort avec frottement).

Réponse. $\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$; puis $e^{-x}(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$.

Correction de l'exercice 9 – Ordre 2 avec second membre

Homogène : $r^2 - 1 = 0$, racines ± 1, donc $y_h(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Particulière : le second membre est e^{2x} et 2 **n'est pas** racine caractéristique ; on cherche $y_p(x) = ke^{2x}$.

— $y_p'' = 4ke^{2x}$, donc $y_p'' - y_p = 3ke^{2x} = e^{2x}$, soit $k = \frac{1}{3}$.
— **Solution générale** : $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.
— **Cas de résonance** : si l'exposant du second membre **était** racine caractéristique (par exemple $y'' - y = e^{x}$), il faudrait chercher $y_p = kxe^{x}$.

Réponse. $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Superposition

On utilise le **principe de superposition** en découpant le second membre.

— **Homogène** : $y_h(x) = Ce^{-x}$.

— **Second membre** x : on cherche $ax + b$. Alors $a + ax + b = x$, donc $a = 1$ et $a + b = 0$, soit $b = -1$: $y_1(x) = x - 1$.

— **Second membre** e^x : on cherche ke^x. Alors $ke^x + ke^x = 2ke^x = e^x$, donc $k = \frac{1}{2}$: $y_2(x) = \frac{1}{2}e^x$.

— **Solution générale** : $y(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$.

— **Vérification** : $y' = 1 + \frac{1}{2}e^x - Ce^{-x}$ et $y' + y = 1 + \frac{1}{2}e^x - Ce^{-x} + x - 1 + \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x} = x + e^x$. Cohérent.

Réponse. $y(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$.

Correction de l'exercice 11 – Modèle de refroidissement

a) On pose $u(t) = T(t) - 20$, alors $u' = T' = -ku$.

— Donc $u(t) = u(0)e^{-0{,}05t}$ avec $u(0) = 80 - 20 = 60$.

— **Solution** : $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}05t}$ (c'est la **loi de Newton**).

b) On résout $20 + 60e^{-0{,}05t} = 30$.

— $60e^{-0{,}05t} = 10$, donc $e^{-0{,}05t} = \frac{1}{6}$.

— En passant au logarithme : $-0{,}05t = -\ln 6$, soit $t = \frac{\ln 6}{0{,}05} = 20\ln 6$.

— $\ln 6 \approx 1{,}7918$, donc $t \approx 35{,}8$ minutes.

— **Contrôle** : $T(35{,}8) = 20 + 60e^{-1{,}79} \approx 20 + 10{,}0 = 30{,}0$. Cohérent.

— La température tend vers 20 °C sans jamais l'atteindre : l'équilibre thermique est une **asymptote**.

Réponse. a) $T(t) = 20 + 60e^{-0{,}05t}$ · b) $t = 20\ln 6 \approx 35{,}8$ min.

Correction de l'exercice 12 – Coefficient non constant et problème de Cauchy

Homogène : $y' = 2xy$, avec $a(x) = 2x$ de primitive $A(x) = x^2$:

$$y_h(x) = C\,e^{x^2}$$

— **Particulière** : on essaie une constante k : $0 = 2xk + x$ pour tout x impose $k = -\frac{1}{2}$. Donc $y_p = -\frac{1}{2}$.

— **Solution générale** : $y(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.

— **Condition initiale** : $y(0) = C - \frac{1}{2} = 0$, donc $C = \frac{1}{2}$ et $y(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2}$.

— **Vérification** : $y' = xe^{x^2}$ et $2xy + x = x(e^{x^2} - 1) + x = xe^{x^2}$. Cohérent.

Réponse. $y(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$; avec $y(0) = 0$: $y(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Charge d'un condensateur

a) **Homogène** : $u' = -\frac{u}{\tau}$, donc $u_h = K\mathrm{e}^{-t/\tau}$. **Particulière** constante : $u_p = E$. Avec $u(0) = K + E = 0$:

$$u(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

b) $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau} = 0{,}99 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t/\tau} = 0{,}01 \Leftrightarrow t = \tau \ln 100 \approx 4{,}6\,\tau$.

c) $\tau = 10^4 \times 10^{-4} = 1$ s : le condensateur est chargé à 99 % (soit 11,88 V) au bout de 4,6 s environ.

— **Règle des électroniciens** : « chargé au bout de 5τ » (99,3 %). La tangente à l'origine, de pente $\frac{E}{\tau}$, atteint E en $t = \tau$.

Réponse. $u(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$; 99 % au bout de $\tau \ln 100 \approx 4{,}6$ s.

Correction de l'exercice 14 – Résonance

a) L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racines $\pm\mathrm{i}$: cos et sin sont solutions de l'**équation homogène**, donc $a\cos x + b\sin x$ donne 0 à gauche, jamais $\cos x$. C'est la **résonance**.

b) $y_p' = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$ et $y_p'' = \cos x - \frac{x}{2}\sin x$. Donc

$$y_p'' + y_p = \cos x - \frac{x}{2}\sin x + \frac{x}{2}\sin x = \cos x$$

c) $y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \frac{x}{2}\sin x$; $y(0) = \lambda = 0$ et $y'(0) = \mu = 0$. Donc $y(x) = \frac{x}{2}\sin x$.

— L'amplitude $\frac{x}{2}$ **croît sans limite** : un système excité exactement à sa fréquence propre, sans amortissement, oscille de plus en plus fort (pont qui entre en résonance, balançoire poussée au bon rythme).

Réponse. $y(x) = \frac{x}{2}\sin x$: oscillations d'amplitude croissante.

Correction de l'exercice 15 – Raccordement en un point singulier

Sur chaque intervalle où $x \neq 0$, l'équation s'écrit $y' = \dfrac{y}{x}$.

— Primitive de $\frac{1}{x}$: $\ln|x|$, donc $y = C\mathrm{e}^{\ln|x|} = C|x|$, ce qui s'écrit $y = C_1 x$ sur $]0\,;+\infty[$ et $y = C_2 x$ sur $]-\infty\,;0[$ (en absorbant le signe dans la constante).

Recollement en 0 : une solution sur $\mathbb{R}$ doit être dérivable en 0.

— La fonction définie par $C_1 x$ sur $\mathbb{R}^+$ et $C_2 x$ sur $\mathbb{R}^-$ est continue en 0 (valeur 0 dans les deux cas).
— Dérivabilité en 0 : dérivée à droite C_1, à gauche C_2. Il faut $C_1 = C_2$.
— On vérifie enfin que $y(x) = Cx$ satisfait l'équation en 0 : $0 \times C - 0 = 0$. Oui.
— **Solutions sur** $\mathbb{R}$: exactement les $y(x) = Cx$ — un espace de **dimension 1**, alors qu'on avait deux constantes libres sur les deux demi-droites. Le point $x = 0$ où le coefficient de y' s'annule est un **point singulier** : c'est lui qui impose le recollement.

Réponse. $y = C_1 x$ et $y = C_2 x$; sur $\mathbb{R}$: $y(x) = Cx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).