Plaquette 5 – Modélisation : physique, biologie, économie

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Premier ordre $y' = -\frac{1}{\tau}(y - y_\infty)$: la solution relaxe exponentiellement vers l'équilibre,

$$y(t) = y_\infty + (y(0) - y_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

— τ = **temps caractéristique** ; 63 % du chemin en τ, 95 % en 3τ, 99 % en $\tau \ln 100 \approx 4{,}6\tau$.

— **Demi-vie** de $y' = -\lambda y$: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

— **Logistique** $P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$: $P(t) = \dfrac{K}{1 + A\mathrm{e}^{-rt}}$, $A = \frac{K}{P_0} - 1$.

— **Oscillateur** $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$: pseudo-pulsation $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ si $\alpha < \omega_0$.

— **Méthode d'Euler** : $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, erreur globale en $O(h)$.

Correction de l'exercice 1 – Datation au carbone 14

a) $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$. La demi-vie vérifie $\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}\ \text{an}^{-1}, \qquad N(t) = N_0\, 2^{-t/T}$$

b) $2^{-t/T} = 0{,}3 \Leftrightarrow t = T\dfrac{\ln(1/0{,}3)}{\ln 2} = 5730 \times 1{,}737 \approx 9950$ ans (environ 10 000 ans, soit 1,74 demi-vie).

c) $2^{-50\,000/5730} \approx 2^{-8{,}73} \approx 0{,}0024$: il reste environ 0,24 % du carbone 14 initial, trop peu pour une mesure fiable.

Réponse. $N = N_0\, 2^{-t/5730}$; âge ≈ 9950 ans ; 0,24 % à 50 000 ans.

Correction de l'exercice 2 – Chute avec frottement linéaire

a) Principe fondamental de la dynamique : $mv' = mg - kv$, soit $v' + \frac{k}{m}v = g$. Homogène : $C\mathrm{e}^{-kt/m}$; particulière constante $\frac{mg}{k}$:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right)$$

b) $v_\ell = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{80 \times 9{,}81}{15} \approx 52{,}3$ m/s, soit 188 km/h.

c) $1 - \mathrm{e}^{-kt/m} = 0{,}9 \Leftrightarrow t = \frac{m}{k}\ln 10 = \frac{80}{15} \times 2{,}303 \approx 12{,}3$ s. Le temps caractéristique est $\tau = \frac{m}{k} \approx 5{,}3$ s.

Réponse. $v = 52{,}3\,(1 - \mathrm{e}^{-t/5{,}33})$ m/s ; 90 % au bout de 12,3 s.

Correction de l'exercice 3 – Chute avec frottement quadratique

a) Avec $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$:

$$v'(t) = v_\ell \cdot \frac{g}{v_\ell}\left(1 - \mathrm{th}^2\frac{gt}{v_\ell}\right) = g\left(1 - \frac{v^2}{v_\ell^2}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— et $v(0) = v_\ell \operatorname{th} 0 = 0$ ✓. (On l'obtient en séparant les variables : $\dfrac{v'}{1 - v^2/v_\ell^2} = g$.)

b) $\operatorname{th} u \to 1$: $v \to v_\ell = 50$ m/s.

c) $\operatorname{th} u = 0{,}9 \Leftrightarrow u = \operatorname{argth} 0{,}9 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1{,}9}{0{,}1} \approx 1{,}472$, donc $t = \dfrac{1{,}472 \times 50}{9{,}81} \approx 7{,}5$ s. L'équation n'est pas linéaire : l'approche de la vitesse limite n'est plus une simple exponentielle, mais reste exponentielle à terme ($1 - \operatorname{th} u \sim 2\mathrm{e}^{-2u}$).

Réponse. $v = 50 \operatorname{th}\left(\dfrac{9{,}81 t}{50}\right)$; 90 % en 7,5 s.

Correction de l'exercice 4 – Croissance logistique

a) $z' = -\dfrac{P'}{P^2} = -\dfrac{r}{P} + \dfrac{r}{K} = -rz + \dfrac{r}{K}$. Homogène $C\mathrm{e}^{-rt}$, particulière $\dfrac{1}{K}$:

$$z(t) = \frac{1}{K} + \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}$$

b) $P(t) = \dfrac{K}{1 + A\mathrm{e}^{-rt}}$ avec $A = \dfrac{K}{P_0} - 1 = 9$: $P(t) = \dfrac{1000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$.

c) $P = 500 \Leftrightarrow 9\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 1 \Leftrightarrow t = 2\ln 9 \approx 4{,}4$ ans. $P' = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right)$ est un trinôme en P, maximal pour $P = \dfrac{K}{2}$: c'est le **point d'inflexion** de la courbe.

Réponse. $P(t) = \dfrac{1000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$; 500 individus au bout de $2\ln 9 \approx 4{,}4$ ans.

Correction de l'exercice 5 – Mélange dans une cuve

a) Entrée : $5 \times 20 = 100$ g/min. Sortie : 5 L/min à la concentration $\dfrac{q}{100}$ g/L, soit $\dfrac{q}{20}$ g/min. Le volume reste 100 L (débits égaux).

$$q'(t) = 100 - \frac{q(t)}{20}$$

b) Équilibre $q_\infty = 2000$ g, temps caractéristique $\tau = 20$ min : $q(t) = 2000\left(1 - \mathrm{e}^{-t/20}\right)$.

c) $q = 1000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t/20} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t = 20\ln 2 \approx 13{,}9$ min. Limite : 2 kg, c'est-à-dire la concentration d'entrée (20 g/L) dans 100 L.

Réponse. $q(t) = 2000(1 - \mathrm{e}^{-t/20})$; 1 kg au bout de 13,9 min ; limite 2 kg.

Correction de l'exercice 6 – Établissement du courant dans une bobine

a) $i' + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$: équilibre $\dfrac{E}{R}$, constante de temps $\tau = \dfrac{L}{R}$:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

b) Solution de l'homogène, continue en t_0 (le courant dans une bobine ne peut pas sauter) : $i(t) = i(t_0)\,\mathrm{e}^{-(t - t_0)/\tau}$.

c) $\tau = \dfrac{0{,}5}{100} = 5$ ms, $\dfrac{E}{R} = 0{,}1$ A. $i(t_0) = 0{,}1(1 - \mathrm{e}^{-4}) \approx 0{,}0982$ A. Puis $i(t_0 + 10\text{ ms}) = 0{,}0982\,\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}0133$ A.

Réponse. $i = \dfrac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L})$; $i(t_0) \approx 98{,}2$ mA, puis 13,3 mA.

Correction de l'exercice 7 – Circuit RLC en régime libre

a) $Lr^2 + Rr + \dfrac{1}{C} = 0$, $\Delta = R^2 - \dfrac{4L}{C}$; critique si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0{,}1}{10^{-5}}} = 200\ \Omega$$

b) $R = 50 < R_c$: pseudo-périodique. Racines $-\alpha \pm i\omega$ avec $\alpha = \frac{R}{2L} = 250\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000$ rad/s, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx 968{,}2$ rad/s. Pseudo-période $\frac{2\pi}{\omega} \approx 6{,}49$ ms ; $q(t) = \mathrm{e}^{-250t}(\lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t)$.

c) $\mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 10}{250} \approx 9{,}2$ ms, soit environ 1,4 pseudo-période.

Réponse. $R_c = 200\ \Omega$; pour 50 Ω, pseudo-période 6,49 ms, amplitude ÷10 en 9,2 ms.

Correction de l’exercice 8 – Perfusion d’un médicament

a) Équilibre : $2 - 0{,}25c = 0$, $c_\infty = 8$ mg/L ; $\tau = 4$ h.

$$c(t) = 8\left(1 - \mathrm{e}^{-t/4}\right)$$

b) $8(1 - \mathrm{e}^{-t/4}) = 7 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t/4} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow t = 4 \ln 8 \approx 8{,}3$ h.

c) Avec $c(0) = c_0$: $c(t) = 8 + (c_0 - 8)\mathrm{e}^{-t/4}$, constante si et seulement si $c_0 = 8$ mg/L. C’est le principe de la **dose de charge** : on place le patient d’emblée à l’équilibre, que la perfusion entretient.

Réponse. $c = 8(1 - \mathrm{e}^{-t/4})$; 7 mg/L au bout de 8,3 h ; dose de charge 8 mg/L.

Correction de l’exercice 9 – Population exploitée

a) Point d’équilibre $P^* = \frac{h}{r}$, écart exponentiel **croissant** (car $r > 0$) :

$$P(t) = \frac{h}{r} + \left(P(0) - \frac{h}{r}\right)\mathrm{e}^{rt}$$

— $P(0) > \frac{h}{r}$: croissance sans limite ; $P(0) = \frac{h}{r}$: constante ; $P(0) < \frac{h}{r}$: effondrement. L’équilibre est **instable**.

b) $\frac{h}{r} = 150 > 100$: extinction quand $150 - 50\,\mathrm{e}^{0,1t} = 0$, soit $\mathrm{e}^{0,1t} = 3$, $t = 10 \ln 3 \approx 11$ ans.

c) $h = rP(0) = 10$ t/an : exactement le croît naturel. Au-delà, la population est condamnée ; en deçà, elle croît (dans ce modèle sans capacité limite).

Réponse. $P = \frac{h}{r} + (P_0 - \frac{h}{r})\mathrm{e}^{rt}$; extinction en $10 \ln 3 \approx 11$ ans ; $h_{\max} = 10$ t/an.

Correction de l’exercice 10 – Pendule simple

a) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$; $\theta = \lambda \cos \omega t + \mu \sin \omega t$ avec $\lambda = \theta_0$, $\mu = 0$:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right), \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}} \approx 2{,}006$ s.

c) $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2 \Leftrightarrow \ell = \frac{g}{\pi^2} \approx 0{,}994$ m.

d) T est proportionnel à $\sqrt{\ell}$: $\sqrt{1{,}01} \approx 1{,}005$, la période augmente d’environ 0,5 % (dérivée logarithmique : $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta \ell}{\ell}$). La période ne dépend ni de la masse ni de l’amplitude (tant qu’elle est petite).

Réponse. $T = 2\pi\sqrt{\ell\,/\,g} \approx 2{,}006$ s pour 1 m ; $\ell = 0{,}994$ m pour 2 s ; +0,5 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Tir avec frottement

a) $u = x'$ vérifie $u' = -\frac{k}{m}u$, $u(0) = v_0$: $u(t) = v_0 e^{-kt/m}$. On intègre avec $x(0) = 0$:

$$x(t) = \int_0^t v_0 e^{-ks/m}\,ds = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

b) $x(t) \to x_\infty = \frac{mv_0}{k}$: le projectile ne dépasse jamais cette abscisse, même en un temps infini.

c) Sans frottement, $x(t) = v_0 t$. À t fixé, $1 - e^{-kt/m} = \frac{kt}{m} - \frac{k^2t^2}{2m^2} + o(k^2)$, d'où

$x(t) = v_0 t - \frac{kv_0 t^2}{2m} + o(k) \to v_0 t$ ✓.

Réponse. $x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-kt/m}) \to \frac{mv_0}{k}$.

Correction de l'exercice 12 – Méthode d'Euler

a) $y_{k+1} = (1+h)y_k$: suite géométrique, $y_n = (1+h)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

b) Script :

```
def euler(f, x0, y0, h, n):
    x, y = x0, y0
    for _ in range(n):
        y = y + h * f(x, y)
        x = x + h
    return y

f = lambda x, y: y
for n in [10, 100, 1000]:
    print(n, round(euler(f, 0, 1, 1 / n, n), 6))
```

— Sorties : 2,593742 ; 2,704814 ; 2,716924, pour e ≈ 2,718282.

c) Erreurs : 0,125 ; 0,0135 ; 0,00136 : divisée par 10 quand h l'est. La méthode est d'**ordre 1**, conformément au développement

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

— Les trapèzes (ordre 2) divisaient l'erreur par 100.

Réponse. $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; erreur $\approx \frac{e}{2n}$: ordre 1.

Correction de l'exercice 13 – Ajustement d'un prix

a) $D - S = 90 - 3p$, d'où

$$p' = 0{,}1(90 - 3p) = 9 - 0{,}3\,p$$

— Équilibre : $D(p^*) = S(p^*)$, soit $p^* = 30$ € (et alors $D = S = 40$ unités).

b) $p(t) = 30 + (20 - 30)e^{-0,3t} = 30 - 10\,e^{-0,3t}$: le prix monte vers 30 €.

c) $e^{-0,3t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 10}{0,3} \approx 7{,}7$ unités de temps. L'équilibre est **stable** car le coefficient $-0{,}3$ est négatif : une offre croissante et une demande décroissante en le prix ramènent toujours le marché à l'équilibre.

Réponse. $p^* = 30$ € ; $p(t) = 30 - 10e^{-0,3t}$; écart ÷10 en 7,7.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Vidange d’un réservoir

a) $(\sqrt{h})' = \frac{h'}{2\sqrt{h}} = -\frac{k}{2}$. Donc $\sqrt{h}$ est affine :

$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h(0)} - \frac{kt}{2} = 2 - 0{,}01\,t, \qquad h(t) = (2 - 0{,}01\,t)^2$$

b) Vide quand $2 - 0{,}01t = 0$: $t = 200$ s. (Le modèle est non linéaire : la vidange se termine en un temps **fini**, contrairement à une décroissance exponentielle.)

c) $h = 2$: $\sqrt{2} = 2 - 0{,}01t$, $t = 100(2 - \sqrt{2}) \approx 58{,}6$ s. Le débit est proportionnel à $\sqrt{h}$: il est fort au début, quand le réservoir est plein, et faiblit ensuite.

Réponse. $h(t) = (2 - 0{,}01t)^2$; vide en 200 s ; moitié de hauteur en 58,6 s.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : filtre passe-bas RC

a) $u = U\mathrm{e}^{i\omega t}$ dans $\tau u' + u = E\mathrm{e}^{i\omega t}$ donne $(1 + i\tau\omega)U = E$. Les coefficients étant réels, la partie réelle résout l’équation réelle.

b) $|U| = \frac{E}{|1 + i\tau\omega|}$ et $\arg U = -\arg(1 + i\tau\omega)$:

$$u_p(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \cos(\omega t - \arctan(\tau\omega))$$

c) La solution générale est $u_p + C\mathrm{e}^{-t/\tau}$, et $C\mathrm{e}^{-t/\tau} \to 0$: le régime transitoire disparaît en quelques τ.

d) $\omega = 2\pi \times 10^3$, $\tau\omega = 2\pi \approx 6{,}28$. Gain $\frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \approx 0{,}157$, soit $\approx -16{,}1$ dB ; déphasage $-\arctan(2\pi) \approx -81°$. Fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi \times 10^{-3}} \approx 159$ Hz : au-dessus, le signal est fortement atténué, d’où le nom de **passe-bas**.

Réponse. Amplitude $\frac{E}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$; à 1 kHz : gain 0,157 ($-16{,}1$ dB), déphasage $-81°$; $f_c \approx 159$ Hz.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).