Plaquette 2 – Équations linéaires d'ordre 1 : méthodes et raccordements

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formule générale pour $y' + a(x)y = b(x)$, A primitive de a nulle en x_0 :

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)$$

- **Unicité** : une solution de $y' = a(x)y$ nulle en un point est nulle partout ; sinon elle ne s'annule jamais.
- **Superposition** : second membre $b_1 + b_2 \Rightarrow$ solution particulière $y_1 + y_2$.
- **Second membre complexe** : si y résout $y' + ay = \mathrm{e}^{i\omega x}$ (a réel), alors $\mathrm{Re}\, y$ résout $y' + ay = \cos \omega x$.
- **Résonance à l'ordre 1** : pour $y' - ay = \mathrm{e}^{ax}$, chercher $kx\mathrm{e}^{ax}$.
- **Raccordement en** x_0 : y doit être continue et dérivable en x_0 et vérifier l'équation en x_0.

Correction de l'exercice 1 – Coefficient trigonométrique

Homogène : $y' = -\tan x\, y$. Une primitive de $-\tan x$ est $\ln(\cos x)$ ($\cos x > 0$ sur I), d'où

$$y_h(x) = C\,\mathrm{e}^{\ln \cos x} = C\cos x$$

- **Variation de la constante** : $y = C(x)\cos x$ donne $C'(x)\cos x = \cos x$, soit $C'(x) = 1$ et $C(x) = x + K$.
- **Solution générale** : $y(x) = (x + K)\cos x$.
- **Condition** $y(0) = K = 1$: $y(x) = (x + 1)\cos x$.
- **Vérification** : $y' = \cos x - (x + 1)\sin x$ et $y' + y\tan x = \cos x - (x + 1)\sin x + (x + 1)\sin x = \cos x$ ✓.

Réponse. $y(x) = (x + K)\cos x$; avec $y(0) = 1$: $(x + 1)\cos x$.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une dérivée de produit

Dans les deux cas, le membre de gauche est la dérivée d'un produit :

$$(1 + x^2)y' + 2xy = ((1 + x^2)y)', \qquad x^2y' + 2xy = (x^2y)'$$

a) $((1 + x^2)y)' = 1$ donne $(1 + x^2)y = x + C$, soit $y(x) = \dfrac{x + C}{1 + x^2}$.

b) $(x^2y)' = \mathrm{e}^x$ donne $x^2y = \mathrm{e}^x + C$, soit $y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + C}{x^2}$.

c) a) : $y(x) \sim \frac{1}{x} \to 0$ pour toute constante C. b) : $y(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \to +\infty$ (croissances comparées), quel que soit C.

- Méthode générale équivalente : homogène $\dfrac{C}{1 + x^2}$ (resp. $\dfrac{C}{x^2}$), puis variation de la constante ; reconnaître le produit évite ces calculs.

Réponse. a) $\dfrac{x + C}{1 + x^2} \to 0$ · b) $\dfrac{\mathrm{e}^x + C}{x^2} \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Variation de la constante avec une intégration par parties

Homogène : $a(x) = -\frac{1}{x}$, primitive $-\ln x$: $y_h(x) = Ce^{\ln x} = Cx$.

Variation de la constante : $y = C(x)\,x$ donne $y' - \frac{y}{x} = C'(x)\,x$, donc $C'(x) = x\ln x$.

— Par parties ($u' = x$, $v = \ln x$) :

$$C(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$$

— **Solution générale** : $y(x) = \frac{x^3\ln x}{2} - \frac{x^3}{4} + Kx$.

— **Vérification** : $y' = \frac{3}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^2 + K = \frac{3}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + K$ et $\frac{y}{x} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$; la différence vaut $x^2\ln x$ ✓.

Réponse. $y(x) = \frac{x^3\ln x}{2} - \frac{x^3}{4} + Kx$.

Correction de l'exercice 4 – Raccordement : deux constantes survivent

a) Sur chaque demi-droite, $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. Homogène : primitive de $\frac{2}{x}$, $2\ln|x|$, d'où Cx^2. Particulière : $y = ax^3$ donne $3ax^3 - 2ax^3 = ax^3$, donc $a = 1$.

$$y(x) = x^3 + C_1x^2\ (x > 0), \qquad y(x) = x^3 + C_2x^2\ (x < 0)$$

b) On pose $y(0) = 0$ (limite des deux côtés) : y est continue. Dérivée à droite en 0 : $\lim \frac{x^3 + C_1x^2}{x} = 0$, de même à gauche : y est dérivable en 0 avec $y'(0) = 0$, et l'équation en 0 donne $0 - 0 = 0$ ✓. **Toutes** les fonctions ainsi recollées sont solutions, pour tous C_1, C_2.

c) Non : il y a une infinité de solutions nulles en 0 (dimension 2). Le théorème de Cauchy ne s'applique pas en un point où le coefficient de y' s'annule. Pour $xy' - y = 0$, au contraire, la dérivabilité imposait $C_1 = C_2$.

Réponse. $y = x^3 + C_1x^2$ ($x \geq 0$), $x^3 + C_2x^2$ ($x < 0$) : famille à deux paramètres.

Correction de l'exercice 5 – Raccordement : infinité de solutions de Cauchy

a) $y' = -\frac{y}{x^2}$; une primitive de $-\frac{1}{x^2}$ est $\frac{1}{x}$:

$$y(x) = C_1e^{1/x}\ (x > 0), \qquad y(x) = C_2e^{1/x}\ (x < 0)$$

b) Une solution sur $\mathbb{R}$ est continue en 0. Or $e^{1/x} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: il faut $C_1 = 0$. Et l'équation en $x = 0$ donne $y(0) = 0$.

c) À gauche, $e^{1/x} \to 0$ quand $x \to 0^-$: continuité. Taux d'accroissement : $\frac{Ce^{1/x}}{x} \to 0$ (poser $u = -\frac{1}{x} \to +\infty$: $-Cue^{-u} \to 0$). Donc $y'(0) = 0$, et l'équation en 0 est vérifiée ($0 + 0 = 0$).

— Conséquence : le problème $y(0) = 0$ a une **infinité** de solutions (une par valeur de C), alors que $y(1) = 1$ n'en a **aucune** sur $\mathbb{R}$ (car $C_1 = 0$).

Réponse. Solutions sur $\mathbb{R}$: 0 sur $\mathbb{R}_+$ et $Ce^{1/x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Correction de l'exercice 6 – Comportement à l'infini

a) Homogène : Ce^{-x}. Variation de la constante : $C'(x)e^{-x} = \frac{1}{x}$, donc $C'(x) = \frac{e^x}{x}$. On choisit la primitive nulle en 1 :

$$y(x) = e^{-x}\left(C + \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $Ce^{-x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $e^{-x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \sim e^{-x}\cdot\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}$. Donc **toutes** les solutions vérifient $y(x) \sim \frac{1}{x}$.

c) Si y' est négligeable devant y (variation lente), l'équation donne $y \approx \frac{1}{x}$: la solution « suit » le second membre avec un retard qui s'efface, le terme Ce^{-x} (mémoire de la condition initiale) disparaissant exponentiellement vite.

Réponse. Toutes les solutions vérifient $y(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 7 – Unique solution périodique

a) On cherche $y_p = a\cos x + b\sin x$: $y_p' + y_p = (a+b)\cos x + (b-a)\sin x$. Identification : $a+b=0$, $b-a=1$, donc $b=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$.

$$y(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2} + Ce^{-x}$$

b) $\frac{\sin x - \cos x}{2}$ est 2π-périodique ; si $C \neq 0$, Ce^{-x} n'est pas périodique (non bornée en $-\infty$), et la somme non plus. Unique solution périodique : $C = 0$.

c) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, d'où $y_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$: l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$ et la sortie est **déphasée** de $\frac{\pi}{4}$ en retard sur l'entrée. Toute autre solution converge vers celle-ci (régime permanent).

Réponse. $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + Ce^{-x}$; solution périodique $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 8 – Second membre qui converge

a) Superposition. Pour le second membre 2 : $y_1 = 2$. Pour e^{-x}, cas de **résonance** (-1 est la racine de l'équation homogène) : on cherche $y_2 = kxe^{-x}$,

$$y_2' + y_2 = ke^{-x} - kxe^{-x} + kxe^{-x} = ke^{-x}$$

— donc $k = 1$. **Solution générale** : $y(x) = 2 + (x+C)e^{-x}$.

b) $(x+C)e^{-x} \to 0$: toutes les solutions tendent vers 2.

c) Ici $a = 1$ et $f(x) \to 2$: $\frac{\ell}{a} = 2$ ✓. Le terme résonant xe^{-x} ralentit la convergence mais ne l'empêche pas.

Réponse. $y(x) = 2 + (x+C)e^{-x} \to 2$.

Correction de l'exercice 9 – Résonance à l'ordre 1

Homogène commune : $y_h = Ce^{2x}$. On retient :

$$y' - ay = P(x)e^{mx} : y_p = Q(x)e^{mx}, \quad \deg Q = \deg P \text{ si } m \neq a,\ \deg P + 1 \text{ si } m = a$$

a) $m = a = 2$: $y_p = kxe^{2x}$, $y_p' - 2y_p = ke^{2x}$, $k = 1$. $y = (x+C)e^{2x}$.

b) $m = 3 \neq 2$: $y_p = ke^{3x}$, $(3k-2k)e^{3x} = e^{3x}$, $k = 1$. $y = e^{3x} + Ce^{2x}$.

c) $y_p = Qe^{2x}$ donne $y_p' - 2y_p = Q'e^{2x}$: il faut $Q' = x$, $Q = \frac{x^2}{2}$. $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{2x}$. (Variation de la constante, directement : $C'(x) = x$.)

Réponse. a) $(x+C)e^{2x}$ · b) $e^{3x} + Ce^{2x}$ · c) $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 10 – Passer par les complexes

a) $z = ke^{ix}$: $z' + z = (i+1)ke^{ix}$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$k = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad z_p = \frac{1-i}{2}\mathrm{e}^{ix}$$

b) L'équation est à coefficients **réels** : parties réelle et imaginaire se séparent.
$z_p = \frac{(1-i)(\cos x + i\sin x)}{2} = \frac{\cos x + \sin x}{2} + i\,\frac{\sin x - \cos x}{2}$.

— $y' + y = \cos x$: $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; $y' + y = \sin x$: $\frac{\sin x - \cos x}{2}$ (déjà trouvée plus haut ✓).

c) Superposition : $3 \cdot \frac{\cos x + \sin x}{2} - \frac{\sin x - \cos x}{2} = 2\cos x + \sin x$. Donc
$y = 2\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$. Vérification :
$y' + y = -2\sin x + \cos x + 2\cos x + \sin x = 3\cos x - \sin x$ ✓.

Réponse. $z_p = \frac{1-i}{2}\mathrm{e}^{ix}$; c) $y = 2\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

Correction de l'exercice 11 – Inégalité différentielle

a) z est dérivable et

$$z'(x) = (y'(x) - a y(x))\mathrm{e}^{-ax} \le 0$$

— z décroît : $z(x) \le z(0) = y(0)$, soit $y(x) \le y(0)\mathrm{e}^{ax}$ (lemme de Grönwall, forme simple).

b) $y > 0$ donne $y' = -y - y^2 \le -y$: a) avec $a = -1$ fournit $y(x) \le \mathrm{e}^{-x}$.

c) $y(0) = \frac{1}{2-1} = 1$; $y' = -\frac{2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x - 1)^2}$ et $-y - y^2 = -\frac{(2\mathrm{e}^x - 1) + 1}{(2\mathrm{e}^x - 1)^2}$: égales ✓. Et
$\frac{1}{2\mathrm{e}^x - 1} \le \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \le 2\mathrm{e}^x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \ge 1$ ✓ pour $x \ge 0$.

Réponse. $y(x) \le y(0)\mathrm{e}^{ax}$; b) $y(x) \le \mathrm{e}^{-x}$.

Correction de l'exercice 12 – Solution évidente

a) $y' = -\frac{x}{1-x^2}y$. Or $-\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}$, de primitive $\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$:

$$y_h(x) = C\sqrt{1-x^2}$$

b) $y = ax + b$: $(1-x^2)a + x(ax+b) = a + bx = 1$ pour tout x, donc $a = 1$, $b = 0$: $y_p = x$.

c) $y(x) = x + C\sqrt{1-x^2}$; $y(0) = C = 2$: $y(x) = x + 2\sqrt{1-x^2}$. Vérification : $y' = 1 - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ et
$(1-x^2)y' + xy = 1 - x^2 - 2x\sqrt{1-x^2} + x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$ ✓.

Réponse. $y(x) = x + C\sqrt{1-x^2}$; avec $y(0) = 2$: $x + 2\sqrt{1-x^2}$.

Correction de l'exercice 13 – Les solutions de l'homogène ne s'annulent pas

a) Avec A primitive de a, les solutions sont $y = C\mathrm{e}^A$. Si $C = 0$, $y = 0$; sinon $|y| = |C|\mathrm{e}^A > 0$ partout.

b) La différence d de deux solutions résout l'homogène et s'annule en un point : $d = 0$ par a).

c) $A(x) = -\cos x$ convient ; $y = C\mathrm{e}^{-\cos x}$ avec $y(0) = C\mathrm{e}^{-1} = -3$, soit $C = -3\mathrm{e}$:

$$y(x) = -3\,\mathrm{e}^{1-\cos x} < 0$$

— $1 - \cos x \in [0, 2]$: y varie entre $-3\mathrm{e}^2 \approx -22{,}2$ (en $x = \pi$) et -3 (en $x = 0$), et elle est 2π-périodique.

Réponse. $y = 0$ ou y ne s'annule pas ; c) $y(x) = -3\mathrm{e}^{1-\cos x} \in [-3\mathrm{e}^2, -3]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Second membre défini par morceaux

a) Sur $]0,+\infty[$: $y_p = ax+b$ avec $a+ax+b=x$, soit $a=1$, $b=-1$. Sur $]-\infty,0[$: second membre $-x$, $y_p=-x+1$.

$$y = x-1+C\mathrm{e}^{-x}\ (x>0), \qquad y=-x+1+D\mathrm{e}^{-x}\ (x<0)$$

b) Continuité en 0 : $-1+C=1+D$, soit $D=C-2$. Alors $y'=|x|-y$ a une limite en 0 des deux côtés ($-y(0)$) : y est dérivable en 0 (théorème de la limite de la dérivée) et vérifie l’équation. Solutions : une famille à **un** paramètre C.

c) $y(0)=0$: $C=1$, $D=-1$. En $+\infty$: $y=x-1+\mathrm{e}^{-x}\sim x$ ✓. En $-\infty$: $y=-x+1-\mathrm{e}^{-x}\sim -\mathrm{e}^{-x}\to-\infty$: **non**, en $-\infty$ c’est l’exponentielle qui domine. Seul $D=0$ ($C=2$) donne $y\sim|x|$ des deux côtés.

Réponse. $y=x-1+C\mathrm{e}^{-x}\ (x\geq 0)$, $-x+1+(C-2)\mathrm{e}^{-x}\ (x<0)$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : solution périodique pour un forçage périodique

a) $\tilde{y}(x)=y(x+T)$ vérifie $\tilde{y}'+\tilde{y}=f(x+T)=f(x)$. Si $y(T)=y(0)$, $\tilde{y}$ et y sont deux solutions égales en 0 : elles coïncident (unicité), donc y est T-périodique. La réciproque est claire.

b) Posons $I=\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$. $y(T)=y(0)$ s’écrit $\mathrm{e}^{-T}(C+I)=C$, soit

$$C=\frac{I}{\mathrm{e}^T-1}$$

— valeur unique car $\mathrm{e}^T\neq 1$.

c) $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. Pour $\cos 2x$, on cherche $a\cos 2x+b\sin 2x$: $(a+2b)\cos 2x+(b-2a)\sin 2x=\cos 2x$ donne $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$. D’où la solution périodique $y_p(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{10}$.

d) Moyenne $\frac{1}{2}$: en intégrant (E) sur une période, $\int_0^T y'=y(T)-y(0)=0$, donc la moyenne de y égale celle de f, soit $\frac{1}{2}$. Oui, c’était prévisible.

Réponse. Unique solution périodique ($C=\frac{I}{\mathrm{e}^T-1}$) ; pour $\sin^2$: $\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{10}$, de moyenne $\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).