Plaquette 3 – Ordre 2 à coefficients constants : seconds membres et résonance

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Solution particulière pour $f(x) = A\mathrm{e}^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$) :

$$P(m) \neq 0 : y_p = \frac{A}{P(m)}\mathrm{e}^{mx} \qquad P(m) = 0,\ P'(m) \neq 0 : y_p = \frac{A}{P'(m)}\,x\,\mathrm{e}^{mx}$$

— Racine **double** m : $y_p = \frac{A}{2a}x^2\mathrm{e}^{mx}$.

— **Second membre polynomial** ($m = 0$) : polynôme de même degré, ou de degré +1 si $c = 0$, +2 si $b = c = 0$.

— **Trigonométrique** : $y'' + \ldots = \cos\omega x \Rightarrow y_p = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\omega x}}{P(i\omega)}\right)$ (coefficients réels).

— **Oscillateur** $y'' + 2\xi\omega_0 y' + \omega_0^2 y = 0$: pseudo-périodique si $\xi < 1$, critique si $\xi = 1$, apériodique si $\xi > 1$.

— **Problème de Cauchy** $y(x_0)$, $y'(x_0)$: solution unique ; problème **aux limites** $y(a)$, $y(b)$: zéro, une ou une infinité de solutions.

Correction de l'exercice 1 – Exponentielle non résonante

Homogène : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$, d'où $y_h = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}$.

Particulière : 3 n'est pas racine, $P(3) = 9 - 9 + 2 = 2$:

$$y_p = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{P(3)} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{2}$$

— **Solution générale** : $y = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$.

— **Conditions** : $\lambda + \mu + \frac{1}{2} = 0$ et $\lambda + 2\mu + \frac{3}{2} = 0$. En soustrayant : $\mu + 1 = 0$, $\mu = -1$, puis $\lambda = \frac{1}{2}$.

— $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)^2$. Vérification : $y(0) = 0$, et $y \geq 0$ avec un minimum en 0, donc $y'(0) = 0$ ✓.

Réponse. $y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)^2$.

Correction de l'exercice 2 – Résonance simple

a) 1 est racine de $P(r) = r^2 - 3r + 2$: e^x est solution de l'homogène, donc $k\mathrm{e}^x$ donne 0.

b) $y_p = kx\mathrm{e}^x$, $y_p' = k(1+x)\mathrm{e}^x$, $y_p'' = k(2+x)\mathrm{e}^x$:

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = k(2 + x - 3 - 3x + 2x)\mathrm{e}^x = -k\,\mathrm{e}^x$$

— donc $k = -1$. Et $P'(r) = 2r - 3$, $P'(1) = -1$: $k = \frac{1}{P'(1)}$ ✓.

c) $y = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x$.

Réponse. $y = (\lambda - x)\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Résonance double

$P(r) = (r-1)^2$: 1 est racine **double**, $y_h = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^x$.

Méthode : avec $y = z\mathrm{e}^x$, $y' = (z' + z)\mathrm{e}^x$, $y'' = (z'' + 2z' + z)\mathrm{e}^x$, et

$$y'' - 2y' + y = z''\,\mathrm{e}^x$$

— Premier second membre : $z'' = 1$, $z = \frac{x^2}{2}$ (plus $\lambda + \mu x$) : $y = \left(\frac{x^2}{2} + \mu x + \lambda\right)\mathrm{e}^x$.

— Second : $z'' = x$, $z = \frac{x^3}{6}$: $y = \left(\frac{x^3}{6} + \mu x + \lambda\right)\mathrm{e}^x$.

— On retrouve la règle : racine double ⇒ degré augmenté de 2, et le coefficient $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$.

Réponse. $\left(\frac{x^2}{2} + \mu x + \lambda\right)\mathrm{e}^x$ puis $\left(\frac{x^3}{6} + \mu x + \lambda\right)\mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 4 – Second membre polynomial avec racine nulle

a) $P(r) = r^2 + r = r(r+1)$: 0 est racine (le coefficient de y est nul). Pour $y = ax + b$: $y'' + y' = a$, constante, jamais égale à x.

b) $y_p = ax^2 + bx$ (b suffit comme terme de degré 1, les constantes sont solutions de l'homogène) :

$$y_p'' + y_p' = 2a + 2ax + b = x \Longrightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -1$$

c) $y = \frac{x^2}{2} - x + \lambda + \mu\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = \lambda + \mu = 0$ et $y'(0) = -1 - \mu = 0$: $\mu = -1$, $\lambda = 1$. Donc $y = \frac{x^2}{2} - x + 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Réponse. $y = \frac{x^2}{2} - x + 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Correction de l'exercice 5 – Second membre trigonométrique

Homogène : $r^2 + 2r + 5 = 0$, $r = -1 \pm 2i$: $y_h = \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x)$.

Particulière : $P(i) = -1 + 2i + 5 = 4 + 2i \neq 0$, donc

$$y_p = \mathrm{Re}\left(\frac{10\,\mathrm{e}^{ix}}{4+2i}\right) = \mathrm{Re}((2-i)(\cos x + i\sin x)) = 2\cos x + \sin x$$

— en utilisant $\frac{10}{4+2i} = \frac{10(4-2i)}{20} = 2 - i$.

— **Vérification** : $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = (-2\cos x - \sin x) + (-4\sin x + 2\cos x) + (10\cos x + 5\sin x) = 10\cos x$ ✓.

— **Comportement** : $y_h \to 0$ (facteur e^{-x}) ; toute solution tend vers le régime permanent $2\cos x + \sin x = \sqrt{5}\cos(x - \varphi)$, $\tan\varphi = \frac{1}{2}$.

Réponse. $y = \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos 2x + \mu\sin 2x) + 2\cos x + \sin x$.

Correction de l'exercice 6 – Exponentielle fois cosinus, cas résonant

a) $P(r) = r^2 - 2r + 2$, $\Delta = -4$, racines $1 \pm i$.

b) Racine simple : $k = \frac{1}{P'(1+i)}$ avec $P'(r) = 2r - 2$:

$$k = \frac{1}{2(1+i)-2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

— $z_p = -\frac{i}{2}x\mathrm{e}^x(\cos x + i\sin x)$, de partie réelle $\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\sin x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le second membre réel est $\operatorname{Re} e^{(1+i)x}$ et les coefficients sont réels : $y_p = \frac{x}{2} e^x \sin x$. Solution générale : $y = e^x\left(\lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x}{2}\sin x\right)$. (Contrôle numérique en $x = 1{,}1$: $y_p'' - 2y_p' + 2y_p \approx 1{,}3627 = e^{1,1}\cos 1{,}1$ ✓.)

Réponse. $y = e^x\left(\lambda \cos x + \left(\mu + \frac{x}{2}\right)\sin x\right)$.

Correction de l'exercice 7 – Problème de Cauchy avec second membre

Homogène : $r = \pm 2i$, $y_h = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$. **Particulière** : $P(0) = 4 \neq 0$, polynôme de degré 1 : $y_p = ax + b$ donne $4ax + 4b = 8x$, soit $y_p = 2x$.

— **Conditions sur la solution complète** (jamais sur y_h seule !) : $y(0) = \lambda = 1$; $y' = -2\lambda \sin 2x + 2\mu \cos 2x + 2$, $y'(0) = 2\mu + 2 = 0$, $\mu = -1$.

$$y(x) = 2x + \cos 2x - \sin 2x = 2x + \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

— La courbe oscille autour de la droite $y = 2x$ avec une amplitude $\sqrt{2}$ et une période π.

Réponse. $y = 2x + \cos 2x - \sin 2x$; amplitude $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Problèmes aux limites

Solution générale : $y = \lambda \cos x + \mu \sin x$. La condition $y(0) = 0$ donne $\lambda = 0$ dans les trois cas :

$$y(x) = \mu \sin x$$

a) $\mu \sin \frac{\pi}{2} = \mu = 1$: **une** solution, $y = \sin x$.

b) $\mu \sin \pi = 0$ pour tout μ : **infinité** de solutions $\mu \sin x$.

c) $\mu \sin \pi = 0 \neq 1$: **aucune** solution.

— Le théorème de Cauchy porte sur des conditions **en un même point** ($y(x_0)$ et $y'(x_0)$). Des conditions en deux points différents donnent un système linéaire en (λ, μ) qui peut être de rang 2, ou dégénéré : c'est le phénomène des **modes propres** (corde vibrante fixée aux deux bouts).

Réponse. a) $\sin x$ · b) $\mu \sin x$, $\mu \in \mathbb{R}$ · c) aucune.

Correction de l'exercice 9 – Retrouver l'équation

Les solutions déterminent les racines de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$; on reconstruit le polynôme à partir de la somme et du produit des racines :

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$$

a) Racine double 2 : $(r-2)^2 = r^2 - 4r + 4$, donc $a = -4$, $b = 4$.

b) Racines $1 \pm 3i$ (conjuguées, car a, b réels) : somme 2, produit $1 + 9 = 10$. $a = -2$, $b = 10$.

c) Racines -1 et 4 : $a = -3$, $b = -4$.

d) Non : l'équation caractéristique aurait trois racines distinctes $1, 2, 3$, impossible pour un polynôme de degré 2. (L'espace des solutions est de dimension 2 ; trois exponentielles distinctes sont libres.)

Réponse. a) $(-4, 4)$ · b) $(-2, 10)$ · c) $(-3, -4)$ · d) impossible.

Correction de l'exercice 10 – Oscillateur amorti : les trois régimes

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $r^2+cr+4=0$, $\Delta=c^2-16$:

$$c<4 \text{ : pseudo-périodique,} \qquad c=4 \text{ : critique,} \qquad c>4 \text{ : apériodique}$$

— ($c=0$: oscillations harmoniques non amorties de pulsation 2.)

b) $r=-1\pm i\sqrt{3}$: $x(t)=\mathrm{e}^{-t}(\lambda\cos\sqrt{3}t+\mu\sin\sqrt{3}t)$, pseudo-période $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\approx 3{,}63$.

c) $r^2+5r+4=(r+1)(r+4)$: $x(t)=\lambda\mathrm{e}^{-t}+\mu\mathrm{e}^{-4t}$. $x(t)=0\Leftrightarrow\lambda\mathrm{e}^{3t}=-\mu$: au plus **une** solution en t. Le mobile passe au plus une fois par l'équilibre.

d) Le régime **critique** $c=4$: $x=(\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{-2t}$. Plus d'amortissement ralentit le retour (la racine $\frac{-c+\sqrt{c^2-16}}{2}$ se rapproche de 0), moins d'amortissement fait osciller. C'est le réglage visé pour les amortisseurs.

Réponse. $c<4$ oscillant, $c=4$ critique, $c>4$ apériodique ; pseudo-période $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pour $c=2$.

Correction de l'exercice 11 – Une équation fonctionnelle

a) $x\mapsto f(-x)$ est dérivable, donc f' aussi, et en dérivant :

$$f'(x)=-f'(-x)=-f(-(-x))=-f(x)$$

b) $f=\lambda\cos+\mu\sin$. Alors $f'(x)=-\lambda\sin x+\mu\cos x$ et $f(-x)=\lambda\cos x-\mu\sin x$. L'égalité pour tout x impose (coefficients de cos et de sin) $\mu=\lambda$.

c) Les solutions sont $f(x)=\lambda(\cos x+\sin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. On a raisonné par **condition nécessaire** : $f''=-f$ a une famille de solutions à deux paramètres, mais toutes ne vérifient pas $f'=f(-x)$ (par exemple cos : $-\sin x\neq\cos x$). La réciproque élimine un paramètre.

Réponse. $f(x)=\lambda(\cos x+\sin x)$.

Correction de l'exercice 12 – Fonctions hyperboliques

a) $r=\pm1$: $y=a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x}$. Comme $\mathrm{e}^{\pm x}=\operatorname{ch}x\pm\operatorname{sh}x$, c'est aussi $\lambda\operatorname{ch}x+\mu\operatorname{sh}x$ ($\lambda=a+b$, $\mu=a-b$). Avantage : $\operatorname{ch}'=\operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}'=\operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}0=1$, $\operatorname{sh}0=0$.

b) $y(0)=\lambda=1$, $y'(0)=\mu=0$: $y=\operatorname{ch}x$. Puis $\lambda=0$ et $\mu\operatorname{sh}1=1$: $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}$.

c) $y=\alpha x\operatorname{sh}x$, $y'=\alpha(\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x)$, $y''=\alpha(2\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x)$:

$$y''-y=2\alpha\operatorname{ch}x=\operatorname{ch}x\Longrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$$

— $y=\frac{x}{2}\operatorname{sh}x+\lambda\operatorname{ch}x+\mu\operatorname{sh}x$.

Réponse. b) $\operatorname{ch}x$; $\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}$ · c) $\frac{x}{2}\operatorname{sh}x+\lambda\operatorname{ch}x+\mu\operatorname{sh}x$.

Correction de l'exercice 13 – Solutions bornées

a) $r^2+r-2=(r-1)(r+2)$: $y=\lambda\mathrm{e}^{x}+\mu\mathrm{e}^{-2x}$. Sur $\mathbb{R}_+$, e^{-2x} est bornée et e^{x} ne l'est pas : bornée si et seulement si $\lambda=0$. Sur $\mathbb{R}$, il faut aussi $\mu=0$ ($\mathrm{e}^{-2x}\to+\infty$ en $-\infty$) : seule la solution nulle.

b) $y''+y=0$: toutes les solutions $\lambda\cos x+\mu\sin x$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. $y''+2y'+2y=0$: $\mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$, seule 0 sur $\mathbb{R}$.

c) $P(-1)=1-1-2=-2$: $y_p=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$. Solutions : $\lambda\mathrm{e}^{x}+\mu\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$, bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\lambda=0$. Puis $y(0)=\mu-\frac{1}{2}=0$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

Réponse. a) $\mu \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}_+$, 0 sur $\mathbb{R}$ · c) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x})$.

Correction de l'exercice 14 – Superposition de seconds membres

$P(r) = r^2 - r = r(r-1)$: racines 0 et 1. $y_h = \lambda + \mu \mathrm{e}^x$.

— $2x$ ($m = 0$ racine simple) : $y_1 = ax^2 + bx$, $y_1'' - y_1' = 2a - 2ax - b = 2x$, d'où $a = -1$, $b = -2$: $y_1 = -x^2 - 2x$.

— e^x ($m = 1$ racine simple) : $y_2 = \frac{x\mathrm{e}^x}{P'(1)} = x\mathrm{e}^x$ ($P'(1) = 1$).

— $\sin x$: $\frac{\mathrm{e}^{ix}}{P(i)}$ avec $P(i) = -1 - i$; $\frac{1}{-1-i} = \frac{-1+i}{2}$. Partie imaginaire de $\frac{(-1+i)(\cos x + i \sin x)}{2}$: $y_3 = \frac{\cos x - \sin x}{2}$.

Par superposition :

$$y = \lambda + \mu \mathrm{e}^x - x^2 - 2x + x\mathrm{e}^x + \frac{\cos x - \sin x}{2}$$

— Contrôle de y_3 : $y_3'' - y_3' = \frac{-\cos x + \sin x}{2} - \frac{-\sin x - \cos x}{2} = \sin x$ ✓.

Réponse. $y = \lambda + (\mu + x)\mathrm{e}^x - x^2 - 2x + \frac{\cos x - \sin x}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : résonance d'un oscillateur forcé

a) $P(r) = r^2 + 2\xi r + 1$ et $P(i\omega) = 1 - \omega^2 + 2i\xi\omega \neq 0$ (car $\xi\omega > 0$). La solution particulière complexe est $\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{P(i\omega)}$; on prend la partie réelle, d'amplitude $\frac{1}{|P(i\omega)|}$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}}$$

b) Racines $-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$, de partie réelle $-\xi < 0$: $y_h = \mathrm{e}^{-\xi t}(\ldots) \to 0$ (régime transitoire).

c) $g'(u) = -2(1-u) + 4\xi^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 - 2\xi^2 > 0$; g est minimale là, donc A maximale. $g(1-2\xi^2) = 4\xi^4 + 4\xi^2(1-2\xi^2) = 4\xi^2(1-\xi^2)$, d'où $A_{\max}$.

d) $A(0{,}5) \approx 1{,}32$; $A(1) = \frac{1}{2\xi} = 5$; $\omega_r \approx 0{,}990$, $A_{\max} \approx 5{,}025$; $A(2) \approx 0{,}33$. Près de la pulsation propre, la réponse est amplifiée d'un facteur 5 : c'est la **résonance**, d'autant plus forte que l'amortissement est faible (sans amortissement, l'amplitude croît linéairement, cf. plaquette 1).

Réponse. $A(\omega) = \frac{1}{|1 - \omega^2 + 2i\xi\omega|}$, maximale en $\sqrt{1-2\xi^2}$; pour $\xi = 0{,}1$, $A_{\max} \approx 5{,}03$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).