Plaquette 4 – Changements de variable et de fonction

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Quand l'équation n'est pas à coefficients constants, on cherche une transformation qui l'y ramène. **Changement de variable** $x = \varphi(t)$: on pose $z(t) = y(\varphi(t))$, on exprime z' et z'' avec la dérivation des composées, puis on **reporte** ($x = \mathrm{e}^t$ pour les équations d'Euler $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x = \sin t$ quand $1 - x^2$ apparaît). **Changement de fonction** $y = u(x)z(x)$: on choisit u pour faire disparaître un terme (u = solution connue, ou u qui tue le terme en z'). Pour une équation **non linéaire** de Bernoulli, $z = y^{1-n}$ la rend linéaire.

Exercice 1 – Équation d'Euler, racines distinctes

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' + xy' - y = 0$.

a) Poser $x = \mathrm{e}^t$, $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$; calculer z' et z'' en fonction de y' et y''.

b) En déduire l'équation vérifiée par z et la résoudre.

c) Revenir à y, puis vérifier directement.

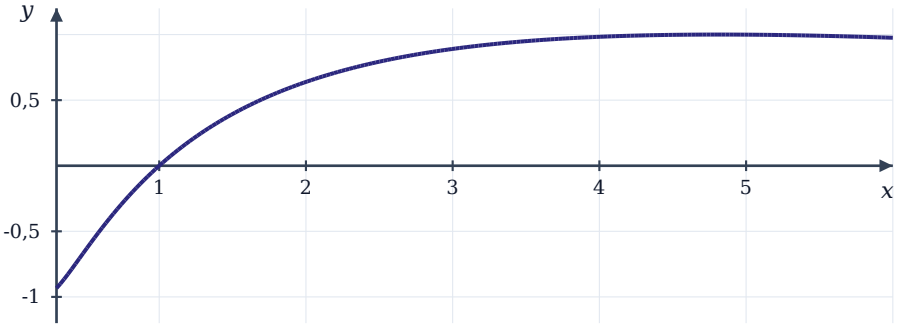
Exercice 2 – Équation d'Euler, racine double

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, puis la solution telle que $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 3 – Équation d'Euler oscillante

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Combien de fois une solution non nulle s'annule-t-elle sur $]0, 1]$? sur $[1, +\infty[$?



sin(ln x) sur [0,3 ; 6] : vers 0, les oscillations s'accumulent

Exercice 4 – Équation de Bernoulli

On cherche les solutions ne s'annulant pas de $y' + y = y^2$.

a) Montrer que $z = \frac{1}{y}$ vérifie une équation linéaire ; la résoudre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire y ; déterminer la solution telle que $y(0) = \frac{1}{2}$.

c) Pour $y(0) = 2$, montrer que la solution n'est définie que sur un intervalle borné à droite et calculer sa borne.

Exercice 5 – Équation de Riccati avec une solution connue

On considère $y' = y^2 - x^2 + 1$.

a) Vérifier que $y_1(x) = x$ est solution.

b) On cherche les autres solutions sous la forme $y = x + \frac{1}{z}$. Montrer que $z' + 2xz = -1$.

c) Résoudre cette équation (on laissera une intégrale) et en déduire les solutions.

Exercice 6 – Changement de fonction z = xy

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $xy'' + 2y' - xy = 0$.

a) Poser $z = xy$ et calculer z''.

b) En déduire z, puis y.

c) Déterminer les solutions qui ont une limite finie en 0^+.

Exercice 7 – Changement de variable x = sin t

Résoudre sur $]-1, 1[$: $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$.

a) Poser $x = \sin t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $z(t) = y(\sin t)$; exprimer z''.

b) En déduire z puis y.

c) Vérifier que $y = x$ est solution et donner la solution telle que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 8 – Variables séparables

a) On cherche les solutions strictement positives de $yy' = x$. Montrer que $(y^2)' = 2x$ et résoudre avec $y(0) = 1$.

b) Même méthode pour $y' = xy^2$ avec $y(0) = 1$ (diviser par y^2). Sur quel intervalle la solution est-elle définie ?

c) Et pour $y' = \mathrm{e}^{-y}$ avec $y(0) = 0$?

Exercice 9 – Équations fonctionnelles

a) Déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous x, y, avec $f(0) = 1$ (dériver par rapport à y puis prendre $y = 0$).

b) Même question pour $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

c) Déterminer les f de classe C^2 telles que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ et $f(0) = 1$ (dériver deux fois par rapport à y).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Reconnaître une dérivée à l'ordre 2

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x$.

c) Donner la solution de b) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 11 – Solutions polynomiales

On considère l'équation de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$.

a) Si y est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a \neq 0$, calculer le coefficient de x^n dans le membre de gauche. En déduire n.

b) Déterminer les solutions polynomiales.

c) Vérifier que $P_2(x) = \dfrac{3x^2-1}{2}$ convient et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx$.

Exercice 12 – Supprimer le terme en y'

On considère $y'' + 2xy' + (x^2+2)y = 0$.

a) On pose $y = z\,e^{-x^2/2}$. Exprimer y' et y'' en fonction de z, z', z''.

b) Montrer que $z'' + z = 0$ et conclure.

c) Pourquoi le facteur $e^{-x^2/2}$ était-il un bon choix ?

Exercice 13 – Abaisser l'ordre avec une solution connue

On considère $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Vérifier que $y_1 = e^x$ est solution, et chercher une solution polynomiale de degré 1.

b) Montrer que e^x et $x+1$ forment une famille libre et donner la solution générale.

c) Retrouver $x+1$ en posant $y = ze^x$: montrer que $w = z'$ vérifie une équation d'ordre 1.

Exercice 14 – Ordre 2 et exponentielle complexe

Soit y une solution réelle de $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$). On pose $z = y' + i\omega y$.

a) Montrer que $z' = i\omega z$ et en déduire z.

b) En déduire y (sans passer par l'équation caractéristique).

c) Montrer que $E = y'^2 + \omega^2 y^2$ est constante (énergie de l'oscillateur) et l'exprimer en fonction de z.

Exercice 15 – Synthèse : équation d'Euler avec second membre

On considère sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$.

a) Avec $x = e^t$, écrire l'équation vérifiée par $z(t) = y(e^t)$.

b) Résoudre cette équation.

c) En déduire les solutions y, et celle qui vérifie $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

d) Étudier le signe de cette solution et sa limite en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).