Plaquette 1 – Équations linéaires d'ordre 1 et 2 : résolution et problèmes de Cauchy

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On résout $y' + a(x)y = b(x)$ par **solution homogène + solution particulière**, on cherche une particulière par la forme du second membre ou par **variation de la constante**, et on traite l'ordre 2 à coefficients constants par l'**équation caractéristique**.

Exercice 1 – Équation homogène

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - 3y = 0$, puis déterminer la solution vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 2 – Second membre constant

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + 2y = 6$.

Exercice 3 – Second membre polynomial

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - y = x$.

Exercice 4 – Coefficient variable

Résoudre sur $]0\,;+\infty[$: $xy' + y = x^2$.

Exercice 5 – Variation de la constante

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

Exercice 6 – Ordre 2, deux racines réelles

Résoudre $y'' - y' - 6y = 0$, puis trouver la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 7 – Ordre 2, racine double

Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Exercice 8 – Ordre 2, racines complexes

Résoudre $y'' + 4y = 0$, puis $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Exercice 9 – Ordre 2 avec second membre

Résoudre $y'' - y = \mathrm{e}^{2x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Superposition

Résoudre $y' + y = x + \mathrm{e}^{x}$.

Exercice 11 – Modèle de refroidissement

Un corps à 80 °C est placé dans une pièce à 20 °C. Sa température vérifie $T' = -k(T - 20)$ avec $k = 0{,}05$ (temps en minutes).

a) Résoudre l'équation.

b) Au bout de combien de minutes la température atteint-elle 30 °C ?

Exercice 12 – Coefficient non constant et problème de Cauchy

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' = 2xy + x$, puis déterminer la solution telle que $y(0) = 0$.

Exercice 13 – Charge d'un condensateur

Un condensateur de capacité C, initialement déchargé, est relié à un générateur de tension E par une résistance R. La tension u à ses bornes vérifie $RC\,u' + u = E$.

a) Résoudre avec $u(0) = 0$; on note $\tau = RC$.

b) Au bout de combien de temps u atteint-il 99 % de E ?

c) Application : $R = 10\ \text{k}\Omega$, $C = 100\ \mu\text{F}$, $E = 12$ V.

Exercice 14 – Résonance

Résoudre $y'' + y = \cos x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

a) Pourquoi ne peut-on pas chercher une solution particulière de la forme $a\cos x + b\sin x$?

b) Vérifier que $y_p(x) = \frac{x}{2}\sin x$ est solution.

c) Conclure et décrire le comportement de la solution.

Exercice 15 – Raccordement en un point singulier

Résoudre $xy' - y = 0$ sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$, puis déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).