Plaquette 5 – Modélisation : physique, biologie, économie

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Démarche de modélisation : (1) **traduire** l'énoncé en équation (un « taux de variation proportionnel à » donne $y' = ky$, une loi de Newton donne $mx'' = \sum F$, un bilan entrée − sortie donne q' = débit entrant − débit sortant) ; (2) identifier le **type** (linéaire d'ordre 1 ou 2, à coefficients constants, ou non linéaire à transformer) ; (3) résoudre avec les **conditions initiales** ; (4) **exploiter** : état d'équilibre, temps caractéristique, instant où un seuil est atteint ; (5) **contrôler** : unités, signe, ordre de grandeur, comportement limite.

Exercice 1 – Datation au carbone 14

Le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 d'un échantillon mort vérifie $N' = -\lambda N$. La demi-vie est $T = 5730$ ans.

a) Exprimer $N(t)$ et λ en fonction de T.

b) Un os contient 30 % du carbone 14 d'un organisme vivant. Estimer son âge.

c) Au-delà de 50 000 ans, la méthode devient imprécise : quelle proportion de carbone 14 reste-t-il alors ?

Exercice 2 – Chute avec frottement linéaire

Un parachutiste de masse $m = 80$ kg tombe verticalement, soumis à son poids et à un frottement $-kv$ avec $k = 15$ kg/s. On prend $g = 9{,}81$ m/s², $v(0) = 0$.

a) Écrire l'équation vérifiée par la vitesse v et la résoudre.

b) Calculer la vitesse limite.

c) Au bout de combien de temps atteint-il 90 % de la vitesse limite ?

Exercice 3 – Chute avec frottement quadratique

À grande vitesse, le frottement de l'air est proportionnel à v^2. La vitesse vérifie alors $v' = g\left(1 - \dfrac{v^2}{v_\ell^2}\right)$ avec $v(0) = 0$ et $v_\ell = 50$ m/s.

a) Montrer que $v(t) = v_\ell \operatorname{th}\left(\dfrac{gt}{v_\ell}\right)$ est solution.

b) On admet que c'est la seule. Quelle est la limite de v ?

c) Au bout de combien de temps atteint-on 90 % de v_ℓ ? Comparer à l'exercice précédent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

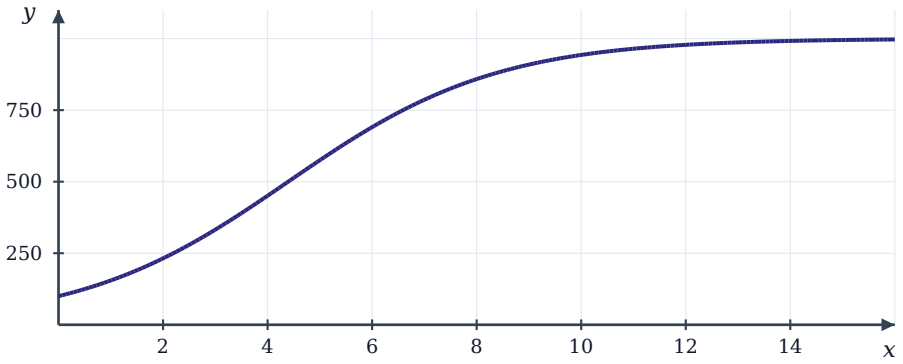
Exercice 4 – Croissance logistique

Une population suit le modèle $P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, avec $K = 1000$, $r = 0{,}5$ par an et $P(0) = 100$.

a) En posant $z = \frac{1}{P}$, montrer que $z' = -rz + \frac{r}{K}$ et résoudre.

b) En déduire $P(t)$.

c) Quand la population atteint-elle 500 individus ? Montrer que c'est l'instant où la croissance est la plus rapide.



La courbe logistique P(t), plafond K = 1000

Exercice 5 – Mélange dans une cuve

Une cuve contient 100 L d'eau pure. On y verse 5 L/min d'eau salée à 20 g/L, et le mélange (homogène) s'écoule à 5 L/min. On note $q(t)$ la masse de sel (en g) au temps t (en min).

a) Faire un bilan entre t et $t + \mathrm{d}t$ et montrer que $q' = 100 - \frac{q}{20}$.

b) Résoudre avec $q(0) = 0$.

c) Au bout de combien de temps la cuve contient-elle 1 kg de sel ? Quelle est la masse limite ?

Exercice 6 – Établissement du courant dans une bobine

Un circuit comporte une bobine d'inductance L et une résistance R en série, alimentées à $t = 0$ par une tension constante E. Le courant vérifie $Li' + Ri = E$, $i(0) = 0$.

a) Résoudre et donner la constante de temps.

b) À l'instant t_0, on court-circuite le générateur : $Li' + Ri = 0$. Exprimer i pour $t \geq t_0$.

c) Application : $L = 0{,}5$ H, $R = 100\ \Omega$, $E = 10$ V, $t_0 = 20$ ms. Calculer $i(t_0)$ et $i(t_0 + 10$ ms).

Exercice 7 – Circuit RLC en régime libre

La charge q d'un condensateur dans un circuit RLC série vérifie $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0$, avec $L = 0{,}1$ H et $C = 10\ \mu$F.

a) Pour quelle valeur R_c de la résistance le régime est-il critique ?

b) Pour $R = 50\ \Omega$, déterminer la nature des solutions, leur pseudo-période et le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

facteur d'amortissement.

c) En combien de pseudo-périodes l'amplitude est-elle divisée par 10 ?

Exercice 8 – Perfusion d'un médicament

Un médicament est perfusé à débit constant ; sa concentration plasmatique $c(t)$ (mg/L, t en h) vérifie $c' = 2 - 0{,}25\,c$, $c(0) = 0$.

a) Résoudre et donner la concentration d'équilibre.

b) La concentration thérapeutique est atteinte à 7 mg/L. Au bout de combien de temps ?

c) Pour aller plus vite, on injecte au départ une dose de charge qui porte immédiatement $c(0)$ à c_0. Quelle valeur de c_0 donne une concentration constante ?

Exercice 9 – Population exploitée

Une population de poissons croît au taux $r = 0{,}1$ par an, et l'on en prélève h tonnes par an : $P' = rP - h$, $P(0) = 100$ t.

a) Résoudre et discuter selon la position de $P(0)$ par rapport à $\frac{h}{r}$.

b) Pour $h = 15$ t/an, montrer que la population s'éteint et calculer la date d'extinction.

c) Quel prélèvement maximal h laisse la population constante ?

Exercice 10 – Pendule simple

Pour de petites oscillations, l'angle θ d'un pendule de longueur ℓ vérifie $\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

a) Résoudre avec $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$, et donner la période T.

b) Calculer T pour $\ell = 1$ m ($g = 9{,}81$ m/s²).

c) Quelle longueur donne une période de 2 s exactement (pendule « battant la seconde ») ?

d) De combien varie T si l'on allonge le pendule de 1 % ?

Exercice 11 – Tir avec frottement

Un projectile de masse m est lancé depuis l'origine avec une vitesse horizontale initiale v_0. On étudie seulement le mouvement horizontal, freiné par une force $-kx'$: $mx'' = -kx'$.

a) Résoudre avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = v_0$ (poser $u = x'$).

b) Montrer que $x(t)$ admet une limite finie x_∞ et l'exprimer.

c) Sans frottement, que devient $x(t)$? Retrouver ce cas comme limite quand $k \to 0$ à t fixé.

Exercice 12 – Méthode d'Euler

On approche la solution de $y' = y$, $y(0) = 1$ sur $[0, 1]$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{n}$: $y_{k+1} = y_k + h y_k$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que l'approximation de $y(1) = e$ vaut $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

b) Écrire une fonction Python *euler(f, x0, y0, h, n)* et l'appliquer pour $n = 10$, 100, 1000.

c) Comment l'erreur évolue-t-elle ? Comparer avec la méthode des trapèzes vue au chapitre intégrales.

Exercice 13 – Ajustement d'un prix

Sur un marché, la demande est $D(p) = 100 - 2p$ et l'offre $S(p) = 10 + p$ (p en euros). Le prix s'ajuste proportionnellement à l'excès de demande : $p' = 0{,}1\,(D(p) - S(p))$.

a) Écrire l'équation vérifiée par p et déterminer le prix d'équilibre p^*.

b) Résoudre avec $p(0) = 20$ €.

c) Au bout de combien de temps l'écart au prix d'équilibre est-il divisé par 10 ?

Exercice 14 – Vidange d'un réservoir

D'après la loi de Torricelli, la hauteur d'eau h (en m) d'un réservoir cylindrique percé au fond vérifie $h' = -k\sqrt{h}$, avec $k = 0{,}02$ m/s et $h(0) = 4$ m.

a) Tant que $h > 0$, montrer que $(\sqrt{h})' = -\frac{k}{2}$. En déduire $h(t)$.

b) Au bout de combien de temps le réservoir est-il vide ?

c) Combien de temps faut-il pour que la hauteur soit divisée par 2 ? Pourquoi est-ce moins que la moitié du temps de vidange ?

Exercice 15 – Synthèse : filtre passe-bas RC

Un filtre RC reçoit une tension $e(t) = E\cos\omega t$; la tension de sortie vérifie $\tau u' + u = E\cos\omega t$, avec $\tau = RC$.

a) Chercher le régime permanent sous la forme $\mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$ et montrer que $U = \dfrac{E}{1 + i\tau\omega}$.

b) En déduire l'amplitude $\dfrac{E}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$ et le déphasage $-\arctan(\tau\omega)$.

c) Montrer que toute solution tend vers ce régime permanent.

d) Application : $\tau = 1$ ms. Calculer le gain (rapport des amplitudes, et en décibels : $20\log_{10}$ du gain) et le déphasage pour $f = 1$ kHz. Quelle est la fréquence de coupure $f_c = \dfrac{1}{2\pi\tau}$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).