Plaquette 2 – Équations linéaires d'ordre 1 : méthodes et raccordements

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Sur un intervalle où le coefficient de y' ne s'annule pas, on **normalise** en $y' + a(x)y = b(x)$, on résout l'homogène (Ce^{-A}), puis on trouve une solution particulière (forme du second membre, **produit reconnu** $(uy)'$, ou **variation de la constante**). Aux points où le coefficient de y' s'annule, on résout sur chaque intervalle puis on **raccorde** : continuité, dérivabilité, et l'équation au point. Pour le **comportement** d'une solution, on part de la formule intégrale $y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 1 – Coefficient trigonométrique

Résoudre sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $y' + y\tan x = \cos x$, puis déterminer la solution telle que $y(0) = 1$.

Exercice 2 – Reconnaître une dérivée de produit

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $(1 + x^2)y' + 2xy = 1$.

b) Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y' + 2xy = \mathrm{e}^x$.

c) Quelle est la limite en $+\infty$ des solutions de a) ? de b) ?

Exercice 3 – Variation de la constante avec une intégration par parties

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \ln x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

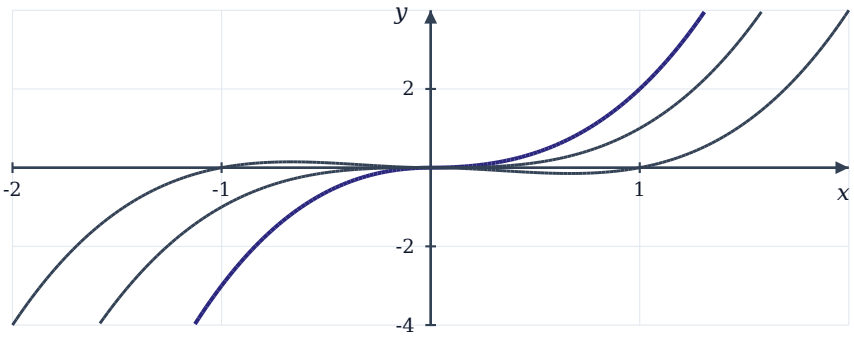
Exercice 4 – Raccordement : deux constantes survivent

On considère $xy' - 2y = x^3$.

a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

b) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

c) Le problème de Cauchy $y(0) = 0$ a-t-il une unique solution ? Comparer avec l'équation $xy' - y = 0$ (plaquette 1).



Trois solutions sur $\mathbb{R}$, toutes nulles en 0

Exercice 5 – Raccordement : infinité de solutions de Cauchy

On considère $x^2y' + y = 0$.

a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

b) Montrer qu'une solution sur $\mathbb{R}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que les fonctions $y(x) = Ce^{1/x}$ pour $x < 0$ et $y(x) = 0$ pour $x \geq 0$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ (étudier la dérivabilité en 0).

Exercice 6 – Comportement à l'infini

On considère $y' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que les solutions sont $y(x) = e^{-x}\left(C + \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\right)$.

b) On admet que $\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \sim \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$ (plaquette 4 du chapitre intégrales). En déduire un équivalent de $y(x)$.

c) Retrouver intuitivement ce résultat : si y varie lentement, que dit l'équation ?

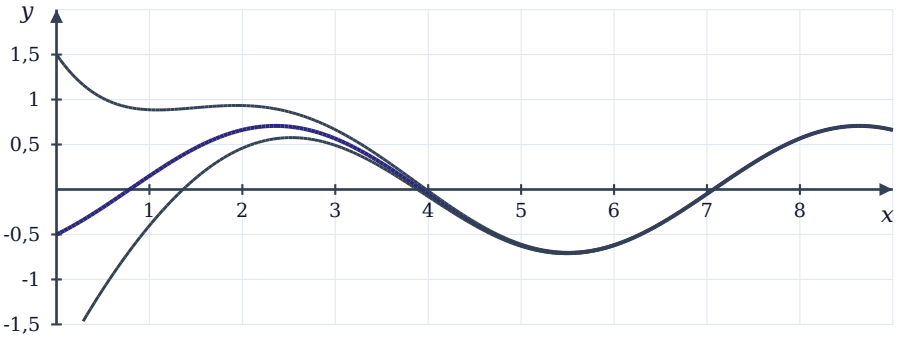
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Unique solution périodique

a) Résoudre $y' + y = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution 2π-périodique.

c) Écrire cette solution sous la forme $A\sin(x-\varphi)$ et interpréter A et φ (filtre du premier ordre).



La solution périodique (épaisse) attire toutes les autres

Exercice 8 – Second membre qui converge

a) Résoudre $y' + y = 2 + \mathrm{e}^{-x}$ (attention : e^{-x} est solution de l'équation homogène).

b) Déterminer la limite des solutions en $+\infty$.

c) Plus généralement, soit $a > 0$ et f continue avec $f(x) \to \ell$. On admet que toute solution de $y' + ay = f$ tend vers $\frac{\ell}{a}$. Vérifier sur a).

Exercice 9 – Résonance à l'ordre 1

a) Résoudre $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$.

b) Résoudre $y' - 2y = \mathrm{e}^{3x}$.

c) Résoudre $y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$ (chercher $y_p = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^{2x}$).

Exercice 10 – Passer par les complexes

a) Trouver une solution particulière de $y' + y = \mathrm{e}^{ix}$ (à valeurs complexes).

b) En déduire des solutions particulières réelles de $y' + y = \cos x$ et de $y' + y = \sin x$.

c) Résoudre $y' + y = 3\cos x - \sin x$.

Exercice 11 – Inégalité différentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$ et y dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $y'(x) \leq ay(x)$ pour tout $x \geq 0$.

a) Étudier la fonction $z(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$ et en déduire $y(x) \leq y(0)\mathrm{e}^{ax}$.

b) Application : y vérifie $y' = -y - y^2$ et $y(0) = 1$, avec $y > 0$ (admis). Montrer que $y(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$.

c) Vérifier avec la solution exacte $y(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^{x} - 1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Solution évidente

On considère $(1-x^2)y' + xy = 1$ sur $]-1,1[$.

a) Résoudre l'équation homogène.

b) Chercher une solution particulière polynomiale de degré 1.

c) En déduire la solution générale, puis celle qui vérifie $y(0) = 2$.

Exercice 13 – Les solutions de l'homogène ne s'annulent pas

Soit a continue sur un intervalle I et y une solution de $y' = a(x)y$.

a) Montrer que y est soit identiquement nulle, soit ne s'annule jamais sur I.

b) En déduire que deux solutions de $y' + a(x)y = b(x)$ qui coïncident en un point sont égales.

c) Application : sans résoudre, montrer que la solution de $y' = (\sin x)\, y$ telle que $y(0) = -3$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$, et donner ses valeurs extrêmes.

Exercice 14 – Second membre défini par morceaux

On considère $y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.

a) Résoudre sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

b) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ (condition de raccordement en 0).

c) La solution nulle en 0 vérifie-t-elle $y(x) \sim |x|$ en $+\infty$? en $-\infty$? Quelle solution vérifie $y(x) \sim |x|$ des deux côtés ?

Exercice 15 – Synthèse : solution périodique pour un forçage périodique

Soit f continue et T-périodique ($T > 0$), et l'équation (E) : $y' + y = f(x)$.

a) Montrer que si y est solution, $x \mapsto y(x+T)$ l'est aussi. En déduire qu'une solution est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$.

b) Avec $y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(C + \int_0^x \mathrm{e}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$, montrer qu'il existe une unique valeur de C donnant une solution périodique.

c) Application : $f(x) = \sin^2 x$ ($T = \pi$). Linéariser f et trouver directement la solution périodique.

d) Donner la valeur moyenne de cette solution sur une période. Pouvait-on la prévoir ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).