Plaquette 3 – Ordre 2 à coefficients constants : seconds membres et résonance

Équations différentielles simples — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour $ay'' + by' + cy = f(x)$: (1) résoudre l'homogène par l'**équation caractéristique** $P(r) = ar^2 + br + c = 0$; (2) chercher une solution particulière selon f : pour $f(x) = Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ ($m \in \mathbb{C}$), essayer $R(x)\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg R = \deg Q$ si m n'est pas racine, $\deg Q + 1$ si m est racine simple, $\deg Q + 2$ si racine double ; un $\cos \omega x$ ou $\sin \omega x$ se traite comme partie réelle ou imaginaire de $\mathrm{e}^{i\omega x}$; (3) **superposer** ; (4) utiliser les conditions **à la fin**, sur la solution générale complète.

Exercice 1 – Exponentielle non résonante

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3x}$, puis déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 2 – Résonance simple

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$.

a) Pourquoi ne peut-on pas chercher $y_p = k\mathrm{e}^{x}$?

b) Chercher $y_p = kx\mathrm{e}^{x}$ et vérifier que $k = \dfrac{1}{P'(1)}$.

c) Donner la solution générale.

Exercice 3 – Résonance double

Résoudre $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$, puis $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^{x}$ (poser $y = z\mathrm{e}^{x}$).

Exercice 4 – Second membre polynomial avec racine nulle

Résoudre $y'' + y' = x$.

a) Pourquoi une solution particulière de degré 1 ne suffit-elle pas ?

b) Trouver y_p de degré 2.

c) Trouver la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5 – Second membre trigonométrique

Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$ en passant par e^{ix}. Décrire le comportement des solutions quand $x \to +\infty$.

Exercice 6 – Exponentielle fois cosinus, cas résonant

Résoudre $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{x}\cos x$.

a) Montrer que $1 + i$ est racine de l'équation caractéristique.

b) Trouver une solution particulière de $z'' - 2z' + 2z = \mathrm{e}^{(1+i)x}$ de la forme $kx\mathrm{e}^{(1+i)x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire la solution générale.

Exercice 7 – Problème de Cauchy avec second membre

Résoudre $y'' + 4y = 8x$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Donner l'amplitude des oscillations autour de la droite $y = 2x$.

Exercice 8 – Problèmes aux limites

On considère $y'' + y = 0$. Déterminer, dans chaque cas, les solutions vérifiant :

a) $y(0) = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

b) $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$;

c) $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 1$.

Pourquoi le théorème de Cauchy ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 9 – Retrouver l'équation

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'équation $y'' + ay' + by = 0$ admette pour solutions :

a) e^{2x} et $x\mathrm{e}^{2x}$;

b) $\mathrm{e}^{x}\cos 3x$;

c) e^{-x} et e^{4x}.

d) Existe-t-il a, b réels pour lesquels e^{x}, e^{2x} et e^{3x} sont toutes solutions ?

Exercice 10 – Oscillateur amorti : les trois régimes

Une masse reliée à un ressort, avec frottement fluide, vérifie $x'' + cx' + 4x = 0$ ($c \geq 0$).

a) Selon la valeur de c, discuter la nature des solutions.

b) Pour $c = 2$: forme des solutions et pseudo-période.

c) Pour $c = 5$: forme des solutions ; le mobile peut-il repasser plusieurs fois par la position d'équilibre ?

d) Quelle valeur de c assure le retour le plus rapide à l'équilibre sans oscillation ?

Exercice 11 – Une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout x.

a) Montrer qu'une telle f est deux fois dérivable et vérifie $f'' = -f$.

b) En déduire la forme de f, puis reporter dans l'équation initiale.

c) Conclure. Pourquoi l'étape de vérification était-elle indispensable ?

Exercice 12 – Fonctions hyperboliques

On considère $y'' = y$.

a) Montrer que les solutions s'écrivent $\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$.

b) Résoudre avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, puis avec $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Résoudre $y'' - y = \operatorname{ch} x$ (résonance : chercher $\alpha x \operatorname{sh} x$).

Exercice 13 – Solutions bornées

a) Déterminer les solutions de $y'' + y' - 2y = 0$ bornées sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

b) Même question pour $y'' + y = 0$ et pour $y'' + 2y' + 2y = 0$.

c) Montrer que $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-x}$ a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 14 – Superposition de seconds membres

Résoudre $y'' - y' = 2x + \mathrm{e}^{x} + \sin x$.

(On traitera séparément les trois seconds membres ; attention aux résonances.)

Exercice 15 – Synthèse : résonance d'un oscillateur forcé

Un oscillateur faiblement amorti est soumis à un forçage sinusoïdal : $y'' + 2\xi y' + y = \cos \omega t$ ($0 < \xi < 1$, $\omega > 0$).

a) Montrer que le régime permanent est $y_p = \operatorname{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{1 - \omega^2 + 2i\xi\omega} \right)$, d'amplitude $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2}}$.

b) Pourquoi les solutions de l'homogène sont-elles négligeables pour t grand ?

c) Étudier $g(u) = (1-u)^2 + 4\xi^2 u$ pour $u = \omega^2$ et montrer que A est maximale en $\omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ (si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$), avec $A_{\max} = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

d) Application : $\xi = 0{,}1$. Calculer $A(0{,}5)$, $A(1)$, $A(\omega_r)$, $A(2)$ et commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).