Plaquette 5 – Isométries, matrices orthogonales et applications

Espaces préhilbertiens — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Isométries et matrices orthogonales.

— f isométrie ($\|f(x)\| = \|x\|$) $\Leftrightarrow$ $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ $\Leftrightarrow$ f envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

— $Q \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Q^{\mathsf{T}}Q = I_n \Leftrightarrow$ colonnes orthonormées ; alors $\det Q = \pm 1$; SO_n : $\det Q = 1$.

— $O_2(\mathbb{R})$: rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et réflexions $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (axe d'angle $\frac{\theta}{2}$).

— Rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par a et d'angle θ :

$$\operatorname{tr} Q = 1 + 2\cos\theta$$

et le signe de $\sin\theta$ est celui de $\det(a, x, Qx)$ pour $x \perp a$.

— **Représentation de Riesz** : en dimension finie, toute forme linéaire s'écrit $\varphi = \langle a, \cdot\rangle$ pour un unique a.

— **Gram** : $G = (\langle u_i, u_j\rangle) = A^{\mathsf{T}}A$ si les u_i sont les colonnes de A ; $\det G \geq 0$, nul si et seulement si la famille est liée.

Correction de l'exercice 1 – Isométrie et produit scalaire

a) Par polarisation et linéarité :

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \langle x, y\rangle$$

b) Si $f(x) = 0$, $\|x\| = 0$: f est injective, donc bijective (dimension finie). Si (e_i) est orthonormée, $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \delta_{ij}$: $(f(e_i))$ est orthonormée, donc base.

c) Les colonnes de Q sont les coordonnées des $f(e_j)$ dans une base orthonormée ; leurs produits scalaires sont les coefficients de $Q^{\mathsf{T}}Q$, égaux à δ_{ij}. Puis $\det(Q)^2 = \det(Q^{\mathsf{T}}Q) = 1$.

d) Non : $f = 2\,\mathrm{id}$ conserve l'orthogonalité mais double les normes. (On montre que les applications conservant l'orthogonalité sont les multiples d'isométries.)

Réponse. Polarisation : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$; $Q^{\mathsf{T}}Q = I_n$, $\det Q = \pm 1$; $2\,\mathrm{id}$ contre-exemple.

Correction de l'exercice 2 – Les matrices orthogonales de taille 2

a) La première colonne est unitaire : $a^2 + b^2 = 1$, donc $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$. La seconde est unitaire et orthogonale à la première : c'est l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux à $(\cos\theta, \sin\theta)$, soit $\pm(-\sin\theta, \cos\theta)$.

b) Avec le signe + : R_θ, de déterminant $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Avec le signe − : $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, de déterminant -1.

c) S_θ est symétrique et orthogonale, donc $S_\theta^2 = I_2$: symétrie orthogonale. Le vecteur $u = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ vérifie

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$S_\theta u = \left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2},\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) = u$$

— donc S_θ est la réflexion d'axe Vect(u).

d) $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, déterminant $-\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$: réflexion d'axe d'angle $\frac{\theta}{2}$, dirigé par $\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (car $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+3/5}{2} = \frac{4}{5}$). Contrôle : $\frac{1}{5}(3\times 2 + 4\times 1, 4\times 2 - 3\times 1) = (2, 1)$.

Réponse. $O_2 = \{R_\theta\} \cup \{S_\theta\}$; S_θ : réflexion d'axe d'angle $\frac{\theta}{2}$; d) réflexion d'axe Vect$(2, 1)$.

Correction de l'exercice 3 – Composer deux réflexions

a) Produit des matrices :

$$S_\alpha S_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

b) L'angle entre les axes est $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, et la rotation obtenue a pour angle $\alpha - \beta$, le double.

c) $S_0 = \mathrm{diag}(1, -1)$ (réflexion d'axe (Ox)). $R_\theta S_0 R_{-\theta}$: on ramène l'axe tourné sur (Ox), on réfléchit, on retourne. C'est la réflexion d'axe d'angle θ, soit $S_{2\theta}$. (Par a) : $S_0 R_{-\theta}$ est une réflexion, et l'on vérifie par le calcul $R_\theta S_0 R_{-\theta} = S_{2\theta}$.)

d) $R_\theta = S_\theta S_0$ par a) (avec $\alpha = \theta$, $\beta = 0$) : composée de la réflexion d'axe (Ox) puis de celle d'axe d'angle $\frac{\theta}{2}$.

Réponse. $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$; $R_\theta S_0 R_{-\theta} = S_{2\theta}$; $R_\theta = S_\theta S_0$.

Correction de l'exercice 4 – Axe et angle d'une rotation de R3

a) Colonnes $\frac{1}{3}(2, 2, -1)$, $\frac{1}{3}(-1, 2, 2)$, $\frac{1}{3}(2, -1, 2)$: de norme 1 ($\frac{4+4+1}{9}$), et deux à deux orthogonales ($-2+4-2=0$, $4-2-2=0$, $-2-2+4=0$).
$\det Q = \frac{1}{27}(2(4+2) + 1(4-1) + 2(4+2)) = \frac{27}{27} = 1$.

b) $Q - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; chaque ligne a une somme nulle, donc $(1,1,1) \in \ker(Q - I_3)$, qui est de dimension 1 (rang 2). Axe : Vect$(1, 1, 1)$.

c) $\mathrm{tr} Q = \frac{2+2+2}{3} = 2 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

d) $Qx = \frac{1}{3}(2+1, 2-2, -1-2) = (1, 0, -1)$. Le signe de $\sin\theta$ est celui de

$$\det(a, x, Qx) = \langle a, x \wedge Qx\rangle, \qquad x \wedge Qx = (1-0,\ 0+1,\ 0+1) = (1, 1, 1)$$

— $\langle a, (1,1,1)\rangle = 3 > 0$: $\theta = +\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe orienté par $(1, 1, 1)$.

Réponse. $Q \in SO_3$; axe Vect$(1, 1, 1)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ (axe orienté par $(1, 1, 1)$).

Correction de l'exercice 5 – Représenter une forme linéaire par un vecteur

a) L'application $a \mapsto \langle a, \cdot\rangle$ de E dans l'espace des formes linéaires est linéaire, injective (si $\langle a, \cdot\rangle = 0$, alors $\langle a, a\rangle = 0$), entre espaces de même dimension 3 : bijective (**théorème de Riesz**).

b) Il suffit que l'égalité ait lieu sur la base $(1, X, X^2)$: $\langle A, X^k\rangle = \varphi(X^k)$, soit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} = 0 \end{cases}$$

— de matrice $H_3 = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)$ et de second membre $(1,0,0)$.

c) $(a,b,c) = H_3^{-1}(1,0,0)^{\mathsf{T}}$ = première colonne : $A = 9 - 36X + 30X^2$.

d) $\int_0^1 (9 - 36t + 30t^2)\,\mathrm{d}t = 9 - 18 + 10 = 1 = \varphi(1)$;
$\int_0^1 (9t - 36t^2 + 30t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2} - 12 + \frac{15}{2} = 0 = \varphi(X)$.

Réponse. $A = 9 - 36X + 30X^2$: $P(0) = \int_0^1 (9 - 36t + 30t^2)P(t)\,\mathrm{d}t$ pour $\deg P \le 2$.

Correction de l’exercice 6 – Polynômes de Legendre par la formule de Rodrigues

a) $L_1 = (X^2-1)' = 2X$. $L_2 = \left(X^4 - 2X^2 + 1\right)'' = 12X^2 - 4 = 12\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$.
$L_3 = \left(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1\right)''' = 120X^3 - 72X = 120\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right)$.

b) ± 1 sont racines d’ordre n de $(X^2-1)^n$, donc racines de ses dérivées d’ordre $k < n$. Une intégration par parties donne

$$\int_{-1}^{1} U^{(n)} Q = \Big[U^{(n-1)} Q\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U^{(n-1)} Q' = -\int_{-1}^{1} U^{(n-1)} Q'$$

— avec $U = (X^2-1)^n$. Après n intégrations : $\langle L_n, Q\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} U Q^{(n)} = 0$ car $\deg Q < n$.

c) L_k est de degré k : famille échelonnée, donc base de $\mathbb{R}_3[X]$. Pour $j < k$, L_j est de degré $< k$, donc $\langle L_k, L_j\rangle = 0$: base orthogonale. À des facteurs près, on retrouve les polynômes 1, X, $X^2 - \frac{1}{3}$, $X^3 - \frac{3}{5}X$ obtenus par Gram-Schmidt (l’orthogonalisation d’une famille échelonnée est unique à des facteurs près).

Réponse. $L_1 = 2X$, $L_2 = 12X^2 - 4$, $L_3 = 120X^3 - 72X$; $L_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$; base orthogonale.

Correction de l’exercice 7 – Coefficients de Fourier d’une parabole

a) Vu dans la plaquette précédente (intégrales de produits de sinus et cosinus sur une période).

b) $\langle f, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 = \frac{2\pi^3}{3}$, d’où le coefficient $\frac{\pi^2}{3}$.

— $\langle f, \sin\rangle = 0$ (fonction impaire intégrée sur un intervalle symétrique).
— $\langle f, \cos\rangle$ par deux intégrations par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t\Big]_{-\pi}^{\pi} = (-2\pi) - (2\pi) = -4\pi$$

— coefficient $\frac{-4\pi}{\pi} = -4$.

c) Projeté : $p(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t$. Erreur, par Pythagore :

— $\|f\|^2 - \|p\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^4 - \left(\frac{\pi^4}{9}\cdot 2\pi + 16\pi\right) = \frac{2\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{9} - 16\pi = \frac{8\pi^5}{45} - 16\pi \approx 54{,}40 - 50{,}27 \approx 4{,}14$.

Réponse. $p(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t$; erreur $\frac{8\pi^5}{45} - 16\pi \approx 4{,}14$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Matrice de Gram et volume

a) Le coefficient (i,j) de $A^{\mathsf{T}}A$ est le produit de la ligne i de A^{T} (colonne u_i) par la colonne u_j : $\langle u_i, u_j\rangle$.

b) Si $GX = 0$, alors $X^{\mathsf{T}}GX = X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX = \|AX\|^2 = 0$, donc $AX = \sum x_i u_i = 0$. Si la famille est libre, $X = 0$: G est inversible. Réciproquement, si $\sum x_i u_i = 0$ avec $X \neq 0$, alors $GX = A^{\mathsf{T}}AX = 0$.

c) $\det G = \det(A^{\mathsf{T}})\det A = (\det A)^2$.

d) $\langle u_i, u_i\rangle = 2$ et $\langle u_i, u_j\rangle = 1$ pour $i \neq j$:

$$\det G = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+2)(2-1)^2 = 4$$

— volume $\sqrt{4} = 2$, en accord avec $\det A = 2$ calculé directement.

Réponse. $G = A^{\mathsf{T}}A$; inversible ssi famille libre ; $\det G = (\det A)^2$; volume 2.

Correction de l'exercice 9 – Inégalité d'Hadamard

a) $\det A = 0$: l'inégalité est alors évidente.

b) $v_i = u_i - p_i(u_i)$, où p_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1})$. Par Pythagore :

$$\|u_i\|^2 = \|p_i(u_i)\|^2 + \|v_i\|^2 \geq \|v_i\|^2$$

c) $|\det A| = |\det Q|\,|\det R| = 1 \times \prod r_{ii} \leq \prod \|u_i\|$. Égalité (pour une famille libre) si et seulement si $p_i(u_i) = 0$ pour tout i, c'est-à-dire si les colonnes sont **deux à deux orthogonales**. Interprétation : le volume d'un parallélépipède est au plus le produit des longueurs de ses arêtes.

d) $|\det A| = |4 - 6| = 2$ et $\|u_1\|\|u_2\| = \sqrt{10}\sqrt{20} = \sqrt{200} \approx 14{,}1$. L'inégalité est très large : les colonnes sont presque colinéaires.

Réponse. $|\det A| \leq \prod \|u_i\|$, égalité ssi colonnes orthogonales (ou une colonne nulle) ; d) $2 \leq 14{,}1$.

Correction de l'exercice 10 – Endomorphismes symétriques

a) En base orthonormée, $\langle Ax, y\rangle = y^{\mathsf{T}}Ax$ et $\langle x, Ay\rangle = y^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}x$; l'égalité pour tous x, y (en particulier pour les vecteurs de base, qui donnent les coefficients) impose $A = A^{\mathsf{T}}$.

b) On calcule $\langle f(x), y\rangle$ de deux façons :

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

— donc $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ et $\langle x, y\rangle = 0$.

c) $A(1,1) = 3(1,1)$ et $A(1,-1) = (1,-1)$: valeurs 3 et 1, et $(1,1) \perp (1,-1)$. Base orthonormée $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$; Q est orthogonale, donc $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$ et $A = Q\,\mathrm{diag}(3,1)\,Q^{\mathsf{T}}$. (C'est un cas du théorème spectral, étudié en MP.)

Réponse. Matrice symétrique ; vecteurs propres de valeurs distinctes orthogonaux ; $A = Q\,\mathrm{diag}(3,1)\,Q^{\mathsf{T}}$ avec $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Régression passant par l'origine : la loi de Hooke

a) Avec $X = (1, 2, 3, 4)$ et $Y = (2{,}1;\ 3{,}9;\ 6{,}2;\ 7{,}8)$, on minimise $\|Y - kX\|^2$: le minimum est atteint quand kX est le projeté de Y sur la droite $\mathrm{Vect}(X)$.

b) Projection sur une droite :

$$k = \frac{\langle Y, X\rangle}{\|X\|^2} = \frac{2{,}1 + 7{,}8 + 18{,}6 + 31{,}2}{1 + 4 + 9 + 16} = \frac{59{,}7}{30} = 1{,}99$$

— raideur : 1,99 cm par newton, soit environ 50 N/m.

c) Valeurs ajustées 1,99 ; 3,98 ; 5,97 ; 7,96. Résidus 0,11 ; −0,08 ; 0,23 ; −0,16. Produit scalaire avec X : $0{,}11 - 0{,}16 + 0{,}69 - 0{,}64 = 0$. (Contrairement au cas avec ordonnée à l'origine, la somme des résidus n'est pas nulle ici : 0,10.)

Réponse. $k = \frac{\langle Y, X\rangle}{\|X\|^2} = 1{,}99$ cm/N ; résidus orthogonaux à X.

Correction de l'exercice 12 – La transposition est une isométrie

a) $\langle A^{\mathsf T}, B^{\mathsf T}\rangle = \sum_{i,j} a_{ji} b_{ji} = \langle A, B\rangle$: T conserve le produit scalaire.

b) $T^2 = \mathrm{id}$, $\ker(T - \mathrm{id}) = S_n$, $\ker(T + \mathrm{id}) = A_n$, et $S_n \perp A_n$: c'est la symétrie orthogonale par rapport à S_n.

c) $\langle QA, QB\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf T} Q^{\mathsf T} Q B) = \mathrm{tr}(A^{\mathsf T} B)$. De même,

$$\langle AQ, BQ\rangle = \mathrm{tr}(Q^{\mathsf T} A^{\mathsf T} B Q) = \mathrm{tr}(A^{\mathsf T} B Q Q^{\mathsf T}) = \mathrm{tr}(A^{\mathsf T} B)$$

— (on a utilisé $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$ et $QQ^{\mathsf T} = I_n$).

d) $\|Q\| = \|QI_n\| = \|I_n\| = \sqrt{n}$. Directement : $\|Q\|^2 = \mathrm{tr}(Q^{\mathsf T} Q) = \mathrm{tr} I_n = n$.

Réponse. T isométrie, symétrie orthogonale par rapport à S_n ; multiplications par Q orthogonale : isométries ; $\|Q\| = \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 13 – Angle entre deux plans

a) Normales $n_1 = (1, 1, 0)$ et $n_2 = (0, 1, 1)$:

$$\cos\theta = \frac{|\langle n_1, n_2\rangle|}{\|n_1\|\|n_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

b) $x = -y$ et $z = -y$: $P_1 \cap P_2 = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$, qui est $n_1 \wedge n_2 = (1 \times 1 - 0,\ 0 - 1 \times 1,\ 1 \times 1 - 0) = (1, -1, 1)$. Contrôle : $\langle (1, -1, 1), n_1\rangle = 0$ et $\langle (1, -1, 1), n_2\rangle = 0$.

c) Perpendiculaires si et seulement si les normales sont orthogonales : $\langle (1, 1, 0), (1, m, 1)\rangle = 1 + m = 0$, soit $m = -1$.

Réponse. $\theta = \frac{\pi}{3}$; $P_1 \cap P_2 = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$; $m = -1$.

Correction de l'exercice 14 – Une isométrie fixant un vecteur

a) Si $x \perp a$, alors $\langle f(x), a\rangle = \langle f(x), f(a)\rangle = \langle x, a\rangle = 0$: $f(x) \in P$.

b) $f(a) = a$ donne la première colonne $(1, 0, 0)$. $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont dans P, donc de première coordonnée nulle. La restriction de f à P est une isométrie de P, de matrice B dans la base orthonormée (e_2, e_3) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad B \in O_2(\mathbb{R})$$

c) Si $\det B = 1$, $B = R_\theta$: f est la **rotation** d'axe $\mathrm{Vect}(a)$ et d'angle θ. Si $\det B = -1$, $B = S_\theta$ est une réflexion du plan P, qui fixe une droite $\mathrm{Vect}(u)$ de P : f fixe le plan $\mathrm{Vect}(a, u)$ et renverse la direction orthogonale : c'est la **réflexion** par rapport à ce plan.

Réponse. $a^\perp$ stable ; matrice $\mathrm{diag}(1, B)$; rotation d'axe a ($\det B = 1$) ou réflexion par rapport à un plan contenant a ($\det B = -1$).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : les isométries qui conservent un carré

a) Q conserve la norme : les points de C de norme maximale ($\sqrt{2}$, les sommets) sont envoyés sur des points de C de norme $\sqrt{2}$, c'est-à-dire des sommets.

b) $Q(1, 1)$ est l'un des 4 sommets ; $Q(1, -1)$ est un sommet orthogonal à $Q(1, 1)$ (car $(1, 1) \perp (1, -1)$ et Q conserve le produit scalaire), soit 2 choix. Comme $((1, 1), (1, -1))$ est une base, Q est déterminée : au plus $4 \times 2 = 8$ matrices.

c) Les 8 conviennent :

$$R_0,\ R_{\pi/2},\ R_\pi,\ R_{3\pi/2} \qquad \text{et} \qquad S_0,\ S_{\pi/2},\ S_\pi,\ S_{3\pi/2}$$

— les rotations d'angle multiple de $\frac{\pi}{2}$; les réflexions d'axes (Ox) (S_0), $y = x$ $(S_{\pi/2})$, (Oy) (S_π), $y = -x$ $(S_{3\pi/2})$, axes de symétrie du carré.

d) Par la formule $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha - \beta}$: la réflexion d'axe (Ox) (S_0) puis celle d'axe $y = x$ $(S_{\pi/2})$ donne $S_{\pi/2} S_0 = R_{\pi/2}$, le quart de tour. Vérification matricielle : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces 8 isométries forment un groupe (le groupe diédral D_4).

Réponse. 8 isométries : $R_{k\pi/2}$ et $S_{k\pi/2}$ ($k = 0, \ldots, 3$) ; $S_{\pi/2} S_0 = R_{\pi/2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).